

# Chapitre 7

## Développements limités

### 1 Développements limités

La notion de développement limité permet d'approximer une fonction au voisinage d'un point par un polynôme. Plus l'ordre du développement est élevé meilleure est l'approximation. Concrètement, pour étudier une expression au voisinage d'un point (comme le calcul d'une limite par exemple), il suffira de remplacer les fonctions élaborées par leur développement limité.

**Définition 1.0.1** Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $x_0$ , mais pas forcément en  $x_0$ . On dit que  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de  $x_0$ , s'il existe des nombres  $a_0, a_1, \dots, a_n$  et une fonction  $\epsilon$  définie au voisinage de  $x_0$  vérifiant

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$$

Le polynôme  $a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$  s'appelle partie principale du développement limité et le terme  $(x - x_0)^n \epsilon(x)$  s'appelle le reste.

**Remarque :** Dire que  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $x_0$  signifie qu'il existe des nombres  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tels que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) - \dots - a_n(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n} = 0$$

Plus  $n$  est grand meilleure est donc l'approximation de  $f(x)$  par le polynôme  $a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$  au voisinage de  $x_0$ .

**Remarque :** La fonction  $x \mapsto f(x)$  admet un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de  $x_0$  si et seulement si la fonction  $h \mapsto f(x_0 + h)$  admet un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0. En effet :

Si l'on pose  $x = x_0 + h$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

équivalent à

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + h^n \epsilon(x_0 + h)$$

et  $\epsilon(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend  $x_0$  si et seulement si  $\epsilon(x_0 + h)$  tend vers 0 quand  $h$  tend vers 0.

Il suffit donc d'étudier la théorie des développements limités au voisinage de 0.

**Exemples :**

- Soit  $n$  un entier naturel, pour tout  $x \neq 1$  on a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Si l'on pose  $\epsilon(x) = \frac{x}{1-x}$  on a

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \epsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0}$$

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$  admet donc un développement limité à tout ordre au voisinage de 0, et on l'a déterminé. Evidemment la fonction  $\epsilon$  n'est pas toujours aussi simple, mais l'on ne cherche pas en général à la déterminer.

- Soit  $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_px^p$  un polynôme. Le polynôme  $P(x)$  admet un développement limité en 0 à tout ordre  $n$  :

Si  $n \geq p$ ,  $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_px^p + x^n \epsilon(x)$  avec  $\epsilon(x) = 0$ .

Si  $n < p$ ,  $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n(a_{n+1}x + \cdots + a_px^{p-n})$  et  $\epsilon(x) = a_{n+1}x + \cdots + a_px^{p-n}$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0.

**Proposition 1.0.2 Unicité du D.L.-** *Le développement limité d'ordre  $n$  d'une fonction  $f$ , s'il existe, est unique.*

**Preuve :** Supposons que  $f$  admette un développement limité à l'ordre  $n$  au voisinage de 0. On a

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$$

On a  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a_0$ . Le nombre  $a_0$  est donc unique d'après l'unicité de la limite.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a_0}{x} = a_1$ . Le nombre  $a_1$  est donc unique également.

Soit  $p$  un entier vérifiant  $0 < p \leq n$ . Supposons que  $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$  soient uniques. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a_0 - a_1x - \cdots - a_{p-1}x^{p-1}}{x^p} = a_p$$

et  $a_p$  est unique d'après l'unicité de la limite et des coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ .

**Proposition 1.0.3** *La partie principale du développement limité en 0 d'une fonction paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire).*

**Preuve :** Supposons que  $f$  admette le développement limité à l'ordre  $n$  suivant en 0

$$f(x) = P(x) + x^n \epsilon(x)$$

On a alors

$$f(-x) = P(-x) + x^n (-1)^n \epsilon(-x)$$

et  $(-1)^n \epsilon(-x)$  tend vers 0 en 0 (comme  $\epsilon(x)$ ). Si  $f$  est paire (resp. impaire) on a  $f(-x) = f(x)$  (resp.  $f(-x) = -f(x)$ ) et d'après l'unicité du développement limité on a  $P(-x) = P(x)$  (resp.  $P(-x) = -P(x)$ ). Le polynôme  $P$  est donc pair (resp. impair).

## 2 Opérations sur les développements limités.

**2.0.4 Intégration.** Supposons que  $f$  soit dérivable au voisinage de 0 et  $f'(x)$  admette un développement limité à l'ordre  $n$  en 0

$$f'(x) = P(x) + x^n \epsilon_1(x)$$

avec  $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ . Posons

$$Q(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

On a  $Q'(x) = P(x)$  donc  $f'(x) - Q'(x) = x^n \epsilon_1(x)$ . Donc d'après le théorème des accroissements finis il existe  $\theta \in ]0, 1[$  tel que

$$f(x) - Q(x) - (f(0) - Q(0)) = x(f'(\theta x) - Q'(\theta x)) = x^{n+1} \theta^n \epsilon_1(\theta x) = x^{n+1} \epsilon_2(x)$$

avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \theta^n \epsilon_1(\theta x) = 0$ . Et puisque  $Q(0) = 0$  on a

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + x^{n+1} \epsilon_2(x)$$

Ce qui fournit la règle suivante :

*Si  $f'$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0,  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n+1$  en 0 dont la partie principale s'obtient en intégrant la partie principale du développement de  $f'$  et en choisissant  $f(0)$  comme constante d'intégration.*

### Exemples :

- On a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^{n-1} \epsilon(x)$$

donc

$$\begin{aligned} -\ln(1-x) &= -\ln 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + x^n \epsilon(x) \\ &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + x^n \epsilon(x) \end{aligned}$$

- On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  donc on obtient le développement limité à l'ordre 1

$$\sin x = x + x\epsilon(x)$$

Par intégration on obtient

$$-\cos x = -\cos 0 + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$$

donc

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$$

En intégrant à nouveau on obtient

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin 0 + x - \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x) \end{aligned}$$

- On a  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$  donc

$$e^x = 1 + \epsilon(x)$$

En intégrant et en utilisant  $e^0 = 1$  on obtient successivement

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + x\epsilon(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x) \end{aligned}$$

**Exemple d'application des DL :** Le prolongement par continuité en 0 de la fonction  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  (qui vaut 1 en 0) est-il dérivable en 0?

Pour cela il faut étudier  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x}$ . D'après le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\sin x$  on a

$$\sin x = x + x^2\epsilon(x)$$

avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$ . On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$$

Le prolongement par continuité en 0 de la fonction  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  est donc dérivable en 0 et sa dérivée vaut 0.

Vous pouvez remarquer que le développement limité de  $\sin x$  en 0 à l'ordre 1, qui se résume sous la forme  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , ne suffit pas.

**Exercice :** Déterminer les développements limités à l'ordre 4 en 0 de  $\cos x$  et  $e^x$ .

**Exercice :** Étudier  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^3}$ .

**2.0.5 Substitution du type**  $x \mapsto ax^p$ . Soit  $a$  un réel et  $p$  un entier. Supposons que  $f(x)$  admette un développement limité à l'ordre  $n$  en 0. On a

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\epsilon(x)$$

On en déduit

$$f(ax^p) = a_0 + a_1ax^p + a_2a^2x^{2p} \cdots + a_n a^n x^{np} + a^n x^{np} \epsilon(ax^p)$$

$\epsilon(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0 donc  $a^n \epsilon(ax^p)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0.

$f(ax^p)$  admet donc un développement limité à l'ordre  $np$  en 0.

**Exemple :** On a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1}\epsilon(x)$$

donc

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + x^{n-1}\epsilon(x)$$

Par intégration on obtient alors

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \epsilon(x)$$

**Exercice :** Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de  $\frac{1}{1+x^2}$  puis celui de  $\arctan x$  à l'ordre 5 en 0.

**2.0.6 Somme.** Soit :

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\epsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + x^n\epsilon_2(x)$$

Additionnons :

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + x^n\epsilon_3(x)$$

avec  $\epsilon_3 = \epsilon_1 + \epsilon_2$ .  $\epsilon_3$  tend vers 0 dès que  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  tendent vers 0. Ce qui fournit la règle suivante :

*Si  $f$  et  $g$  admettent des développements limités d'ordre  $n$ , alors la fonction  $f + g$  admet un développement limité d'ordre  $n$  dont la partie principale est la somme des parties principales de  $f$  et  $g$ .*

**Exercice :** Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\operatorname{ch}x$ .

**2.0.7 Produit.** Soit encore :

$$f(x) = A(x) + x^n\epsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = B(x) + x^n\epsilon_2(x)$$

Multiplions :

$$f(x)g(x) = A(x)B(x) + x^n(A(x)\epsilon_2(x) + B(x)\epsilon_1(x) + x^n\epsilon_1(x)\epsilon_2(x))$$

Gardons dans  $A(x)B(x)$  les termes de degré inférieur ou égal à  $n$ :

$$A(x)B(x) = C(x) + x^{n+1}D(x) = C(x) + x^n\epsilon_3(x)$$

où  $D(x)$  est un polynôme et  $\epsilon_3(x) = xD(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0. Le produit  $f(x)g(x)$  se mettra donc sous la forme :

$$f(x)g(x) = C(x) + x^n\epsilon_4(x)$$

avec  $\epsilon_4(x) = \epsilon_3(x) + A(x)\epsilon_2(x) + B(x)\epsilon_1(x) + x^n\epsilon_1(x)\epsilon_2(x)$  qui tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0. d'où la règle :

*Le produit admet un développement limité d'ordre  $n$  dont la partie principale s'obtient en prenant dans le produit des parties principales les termes de degré inférieur ou égal à  $n$ .*

**Exercice :** Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $(1+x)e^x$  et le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $\frac{e^x}{1-x}$ .

### 2.0.8 Composition.

$$f(x) = A(x) + x^n\epsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = B(x) + x^n\epsilon_2(x)$$

Notons  $A(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  et  $B(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$  et supposons que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ , c'est-à-dire  $b_0 = 0$ .

Composons :

$$f(g(x)) = A(B(x) + x^n\epsilon_2(x)) + (B(x) + x^n\epsilon_2(x))^n\epsilon_1(B(x) + x^n\epsilon_2(x))$$

-  $(B(x) + x^n\epsilon_2(x))^n = x^n(b_1 + b_2x + \dots + b_nx^{n-1} + x^{n-1}\epsilon_2(x))^n = x^nh(x)$  où  $h(x)$  est bornée au voisinage de 0.

- Si l'on pose  $\epsilon_3(x) = h(x)\epsilon_1(B(x) + x^n\epsilon_2(x))$  par composition des limites on obtient  $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_3(x) = 0$ .

-  $A(B(x) + x^n\epsilon_2(x)) - A(B(x)) = \sum_{k=1}^n a_k [(B(x) + x^n\epsilon_2(x))^k - B(x)^k] = \sum_{k=1}^n a_k x^n \epsilon_2(x) u_k(x)$  où les fonctions  $u_k$  sont bornées au voisinage de 0. Donc  $A(B(x) + x^n\epsilon_2(x)) = A(B(x)) + x^n\epsilon_4(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_4(x) = 0$ .

On obtient donc  $f(g(x)) = A(B(x)) + x^n\epsilon_5(x)$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_5(x) = 0$ . Ce qui fournit la règle suivante :

*Si  $f$  et  $g$  admettent des développements limités d'ordre  $n$  en 0 et  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ , alors la composée  $f \circ g$  admet un développement limité d'ordre  $n$  dont la partie principale s'obtient*

en prenant dans la composée des parties principales les termes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

**Exemple :** Pour tout  $n$ ,  $e^x$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 et  $\sin x$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 et  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ , donc  $e^{\sin x}$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0. Déterminons ce développement limité dans le cas  $n = 3$ .

$\sin x = x - x^3/6 + x^3\epsilon_1(x)$  et  $e^u = 1 + u + u^2/2 + u^3/6 + u^3\epsilon_2(u)$  donc

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + (x - x^3/6) + (x - x^3/6)^2/2 + (x - x^3/6)^3/6 + x^3\epsilon_3(x) \\ &= 1 + x - x^3/6 + x^2/2 + x^3/6 + x^3\epsilon_4(x) \\ &= 1 + x + x^2/2 + x^3\epsilon_4(x) \end{aligned}$$

**Exercice :** Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $e^{\cos x}$ .

**2.0.9 Quotient.** Supposons que  $f(x)$  et  $g(x)$  admettent des développements limités à l'ordre  $n$  en 0 et que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = b_0$  soit  $\neq 0$ . On a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)} = f(x) \frac{1}{b_0} \frac{1}{1 - \frac{b_0 - g(x)}{b_0}}$$

$\frac{1}{1-x}$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0,  $\frac{b_0 - g(x)}{b_0}$  aussi, et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{b_0 - g(x)}{b_0} = 0$ , la composée admet donc un développement limité à l'ordre  $n$  en 0.  $\frac{1}{g}$  admet donc un développement limité à l'ordre  $n$  en 0, donc le produit par  $f$  également. Ce qui fournit la règle suivante :

Si  $f$  et  $g$  admettent des développements limités d'ordre  $n$  en 0 et  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 0$ , le quotient

$\frac{f}{g}$  admet un développement limité d'ordre  $n$ .

**Exemple :** Déterminons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\tan x$ .

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \sin x \frac{1}{1 - (1 - \cos x)} \end{aligned}$$

$1 - \cos x = x^2/2 + x^3\epsilon_1(x)$  et  $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^3\epsilon_2(u)$  donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - (1 - \cos x)} &= 1 + x^2/2 + (x^2/2)^2 + (x^2/2)^3 + x^3\epsilon_3(x) \\ &= 1 + x^2/2 + x^3\epsilon_4(x) \end{aligned}$$

$\sin x = x - x^3/6 + x^3\epsilon_5(x)$  donc

$$\begin{aligned} \tan x &= (x - x^3/6)(1 + x^2/2) + x^3\epsilon_6(x) \\ &= x + x^3/3 + x^3\epsilon_7(x) \end{aligned}$$

**Exercice :** Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\ln x$  et le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $\frac{1}{e^x + 1}$ .

**2.0.10 Translation et développement limité en un point autre que 0.** On veut déterminer un développement limité de  $f(x)$  en  $x_0$ . On pose  $x = x_0 + h$  et  $f(x) = f(x_0 + h) = g(h)$ . Si  $g(h)$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 on a

$$g(h) = a_0 + a_1h + \cdots + a_nh^n + h^n\epsilon(h)$$

On a alors

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\epsilon(x - x_0)$$

et  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en  $x_0$ .

**Exemple :** Déterminons le développement limité à l'ordre 2 en 2 de  $\ln x$ . On pose  $x = 2 + h$  et

$$\begin{aligned} \ln x &= \ln(2 + h) \\ &= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{h}{2}\right) \\ &= \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2} + h^2\epsilon(h) \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{8}(x - 2)^2 + (x - 2)^2\epsilon(x - 2) \end{aligned}$$

**Exercice :** Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en  $\frac{\pi}{2}$  de  $\cos x$  et celui de  $e^x$  à l'ordre 2 en 1.

### 3 Formule de Taylor-Young

On rappelle que lorsqu'une fonction  $f$  est définie dans un voisinage de  $x_0$  et dérivable en  $x_0$  il existe une fonction  $\epsilon$  définie au voisinage de  $x_0$  vérifiant

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\epsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$$

$f$  admet donc un développement limité à l'ordre 1 en  $x_0$ .

Nous allons généraliser cette propriété.

**Théorème 3.0.11 (Formule de Taylor-Young)** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $n - 1$  fois dérivable ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) sur  $I$ , et admettant une dérivée nième en un point  $x_0$  de  $I$ . Alors il existe une fonction  $\epsilon$  tendant vers 0 quand  $x$  tend vers  $x_0$  telle que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\epsilon(x)$$

$f$  admet donc un développement limité à l'ordre  $n$  en  $x_0$ .

**Définition 3.0.12** La formule précédente est appelée le développement de Taylor-Young de la fonction  $f$  à l'ordre  $n$  en  $x_0$ . Le polynôme de la variable  $x$

$$P_{f,n}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

est appelé **partie principale** et la quantité  $(x - x_0)^n \epsilon(x)$  est appelée **reste** du développement de Taylor-Young.

**Preuve du théorème :** La preuve se fait par récurrence sur  $n$ . Comme on l'a déjà vu, si  $n = 1$  le théorème est vrai. Supposons que le théorème soit vrai pour un entier  $n \geq 1$ . Nous allons montrer qu'il est vrai pour l'entier  $n + 1$ .

Soit  $f$   $n$  fois dérivable sur  $I$  et  $n + 1$  fois dérivable en  $x_0$ . La fonction  $f'$  est alors  $n - 1$  fois dérivable sur  $I$  et  $n$  fois dérivable en  $x_0$ . Nous voulons montrer que

$$f(x) - P_{f,n+1}(x) = (x - x_0)^{n+1} \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$$

et

$$P_{f,n+1}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

D'après l'hypothèse de récurrence

$$f'(x) = P_{f',n}(x) + (x - x_0)^n \epsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon_1(x) = 0$$

Remarquons maintenant que

$$P_{f',n}(x) = P'_{f,n+1}(x)$$

On a donc

$$f'(x) - P'_{f,n+1}(x) = (x - x_0)^n \epsilon_1(x)$$

D'après le théorème des accroissements finis il existe  $c$  (dépendant à priori de  $x$ ) compris entre  $x$  et  $x_0$  tel que

$$\begin{aligned} f(x) - P_{f,n+1}(x) - (f(x_0) - P_{f,n+1}(x_0)) &= (x - x_0)(f'(c) - P'_{f,n+1}(c)) \\ &= (x - x_0)(c - x_0)^n \epsilon_1(c) \\ &= (x - x_0)^{n+1} \left( \frac{c - x_0}{x - x_0} \right)^n \epsilon_1(c) \end{aligned}$$

Puisque  $P_{f,n+1}(x_0) = f(x_0)$  on obtient

$$f(x) = P_{f,n+1}(x) + (x - x_0)^{n+1} \epsilon_2(x)$$

avec

$$\epsilon_2(x) = \left( \frac{c - x_0}{x - x_0} \right)^n \epsilon_1(c)$$

$c$  étant compris entre  $x$  et  $x_0$  on a

$$|\epsilon_2(x)| \leq |\epsilon_1(c)|$$

Lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ ,  $c$  tend vers  $x_0$ , donc  $\epsilon_1(c)$  tend vers 0 et  $\epsilon_2(x)$  tend vers 0. Le théorème est donc vrai pour l'entier  $n + 1$ .

**Remarque :** La formule de Taylor-Young va nous permettre de calculer les développements limités de fonctions de références. Mais ce n'est pas en général la méthode la plus appropriée pour déterminer le développement limité d'une fonction, le calcul des dérivées successives pouvant se révéler très compliqué. Il vaut mieux utiliser les opérations sur les développements limités.

## 4 Développements limités de référence

Tous les développements limités de cette section sont à connaître absolument.

Nous rappelons que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \epsilon(x)$$

et

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \epsilon(x)$$

Nous allons obtenir les autres développements de référence par la formule de Taylor-Young en 0.

- La fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est elle-même. Par récurrence sur l'ordre de dérivation on obtient que la fonction exponentielle est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  sa dérivée nième est elle-même. Puisque  $e^0 = 1$ , la formule de Taylor-Young donne

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

- La fonction sinus est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et a pour dérivée la fonction cosinus. Le cosinus est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc sinus est 2 fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\sin'' = -\sin$ .  $\sin''$  est donc 2 fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\sin^{(4)} = \sin$ . Par récurrence sur l'ordre de dérivation on obtient que sinus est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$  et les dérivées successives de sin sont cos,  $-\sin$ ,  $-\cos$ , sin, cos,  $-\sin$ , ... On a donc  $\sin^{(2n)} = (-1)^n \sin$  et  $\sin^{(2n+1)} = (-1)^n \cos$  et donc  $\sin^{(2n)} 0 = (-1)^n \sin 0 = 0$  et  $\sin^{(2n+1)} 0 = (-1)^n \cos 0 = (-1)^n$ . Le développement limité à l'ordre  $2n$  est donc

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n} \epsilon(x)$$

Celui à l'ordre  $2n + 1$  est

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \epsilon(x)$$

• La fonction cosinus est la dérivée de la fonction sinus donc est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$  également. On a  $\cos^{(2n+1)} 0 = \sin^{(2n+2)} 0 = 0$  et  $\cos^{(2n)} 0 = \sin^{(2n+1)} 0 = (-1)^n$ . Le développement limité à l'ordre  $2n$  est donc

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \epsilon(x)$$

Celui à l'ordre  $2n + 1$  est

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \epsilon(x)$$

On peut aussi obtenir le développement de  $\cos x$  par intégration du développement de  $-\sin x$ .

• Soit  $\alpha$  un réel. On pose  $f(x) = (1+x)^\alpha$  pour  $x > -1$ .  $f$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$  et sur cet intervalle  $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ .  $f'$  est donc dérivable sur  $] -1, +\infty[$ . Supposons que  $f$  soit  $n$  fois dérivable sur  $] -1, +\infty[$  et que sur cet intervalle  $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ . Alors  $f^{(n)}$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$ .  $f$  est donc  $n+1$  fois dérivable sur  $] -1, +\infty[$  et

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1} \\ &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n+1)+1)(1+x)^{\alpha-(n+1)} \end{aligned}$$

$f$  est donc indéfiniment dérivable sur  $] -1, +\infty[$  et pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$   $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$ . On obtient donc

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \epsilon(x)$$

## 5 Développements limités des fonctions usuelles

Le but de cette section est de donner une méthode permettant d'obtenir les développements limités des autres fonctions usuelles à l'aide des développements limités de référence.

- $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \epsilon(x)$
- $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2} \epsilon(x)$

Remarquez que la partie principale du développement limité de  $\operatorname{ch} x$  (resp.  $\operatorname{sh} x$ ) est la partie paire (resp. impaire) de la partie principale du développement limité de  $e^x$ .

Le développement de  $\tan x$  s'obtient par composition et produit de développements de référence. Par exemple le développement à l'ordre 5 est

$$\tan x = \sin x \frac{1}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + x^5 \epsilon(x)$$

Puisque

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \epsilon(x)$$

on obtient facilement par substitution les trois suivants :

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x)$
- $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + x^{2n+1} \epsilon(x)$
- $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n+1} \epsilon(x)$

On en déduit les quatre suivants par intégration :

- $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + x^n \epsilon(x)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \epsilon(x)$
- $\operatorname{Arth}x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2} \epsilon(x)$
- $\operatorname{Arctan}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2} \epsilon(x)$

A l'aide du développement

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \epsilon(x)$$

on obtient les deux suivants :

- $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots 2n} x^{2n} + x^{2n+1} \epsilon(x)$
- $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots 2n} x^{2n} + x^{2n+1} \epsilon(x)$

puis par intégration les deux suivants :

- $\operatorname{Arcsin}x = x + \frac{x^3}{2.3} + \cdots + \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots 2n.(2n+1)} x^{2n+1} + x^{2n+2} \epsilon(x)$
- $\operatorname{Argsh}x = x - \frac{x^3}{2.3} + \cdots + (-1)^n \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots 2n.(2n+1)} x^{2n+1} + x^{2n+2} \epsilon(x)$

## 6 Exercices

**6.1** Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\sin x - x + x^7$ .

**6.2** Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de  $\sin^2 x$  puis celui de  $\cos^2 x$ .

**6.3** Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de  $\operatorname{Arcsin} x$ .

**6.4** Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\sqrt{1+x+x^2}$ .

**6.5** Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de  $\ln(2 - \sin x)$ .

**6.6** Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $\frac{1}{1 + \cos x}$ .

**6.7** Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $\sqrt{\frac{x-4}{x-1}}$ .

**6.8** Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de  $\arctan(1+x)$ .

**6.9** Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en  $\frac{\pi}{4}$  de  $\tan x$ .

**6.10** Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 1 de  $\sqrt{x}e^x$ .

**6.11** En utilisant des développements limités déterminer les limites suivantes quand elles existent :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x - \sin x}$$

**6.12** Calculer la limite en 0 de  $\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}}}{x}$ .

**6.13** Etudier suivant les valeurs de l'entier  $n$  la limite quand  $x$  tend vers 0 de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\tan(\ln(1+x)) - \ln(1+\tan x)}{x^n}.$$

**6.14** On considère le prolongement par continuité en 0 de la fonction  $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ . Déterminer ce prolongement. Montrer qu'il est dérivable en 0. Montrer qu'il admet un développement limité à tout ordre en 0 puis calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3.

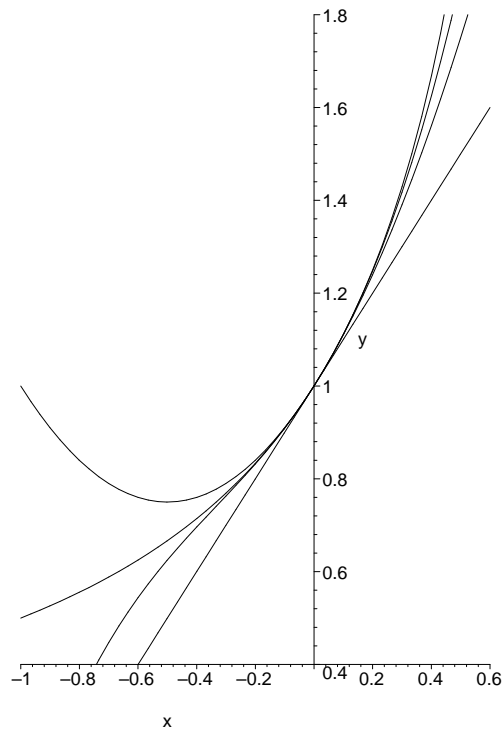
**6.15** Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $\ln(\cos x + \sin x)$ .

En déduire que la suite  $u_n = \left(\cos \frac{1}{n} + \sin \frac{1}{n}\right)^n$  converge. Dire si  $u_n$  converge vers cette limite par valeurs inférieures ou supérieures.

**6.16** En utilisant des développements limités, étudier au voisinage de 0 la position relative des deux courbes d'équations :

$$y = \frac{1+x}{1-x} \quad \text{et} \quad y = e^{2x}.$$

**6.17** Les courbes d'équations  $y = \frac{1}{1-x}$ ,  $y = 1+x$ ,  $y = 1+x+x^2$  et  $y = 1+x+x^2+x^3$  sont représentées ci-dessous, mais les légendes ont été perdues. Pouvez-vous les retrouver?



Parmi les trois dernières courbes, laquelle vous semble approximer le mieux la première au voisinage de 0?

**6.18** Soit  $f(x) = \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$ . Déterminer les constantes  $a$  et  $b$  de telle façon que l'on ait

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \cos x}{x^n} = 0$$

avec l'entier  $n$  le plus grand possible. Autrement dit, on cherche  $a$  et  $b$  afin que  $f(x)$  approxime le mieux possible  $\cos x$  au voisinage de 0.