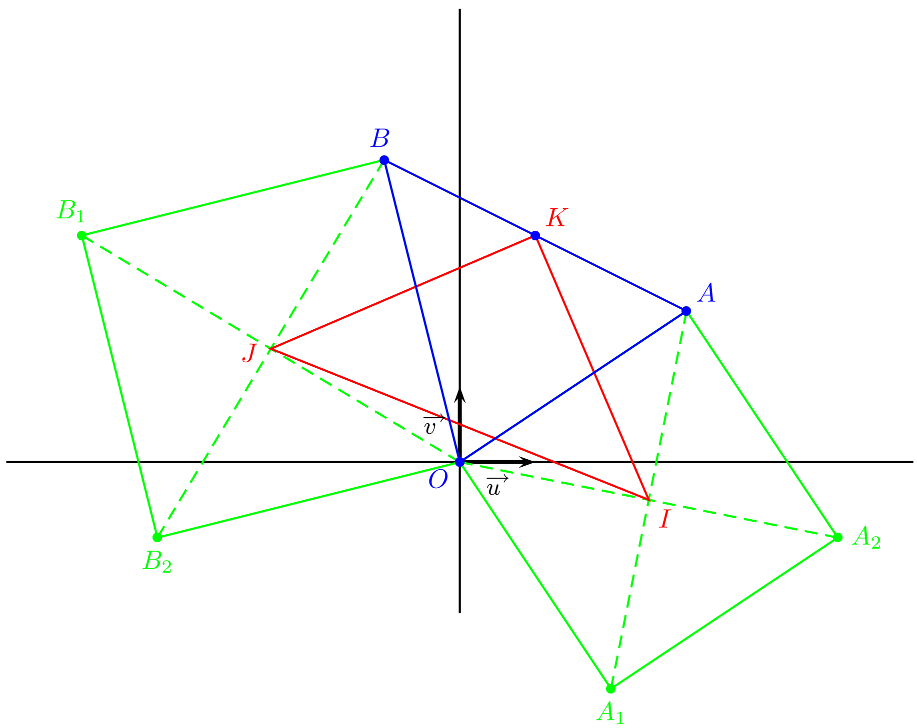
Bac S Juin 2003

Antilles-Guyane

Exercice 1 (4 points)

FIG. 1 – Exercice 1



1) a) Considérons la rotation r de centre A, et d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors, par définition des points : $A_2 = r(O)$. Par conséquent (écriture complexe d'une rotation) :

$$z_{A_2} - z_A = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}(z_O - z_A),$$

d'où l'on tire : $z_{A_2} = \mathbf{i}(0 - (3 + 2\mathbf{i})) + 3 + 2\mathbf{i}$, puis $\boxed{z_{A_2} = 5 - \mathbf{i}}$.

I, centre du carré OAA_2A_1 est aussi le milieu de la diagonale $[OA_2]$, donc : $z_I = \frac{1}{2}(z_O + z_{A_2})$, d'où : $\boxed{z_I = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{i}}$.

b) Considérons la rotation r' de centre B, et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, alors, par définition des points : $B_1 = r'(O)$. Par conséquent (écriture complexe d'une rotation) :

$$z_{B_1} - z_B = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}(z_O - z_B),$$

d'où l'on tire : $z_{B_1} = -\mathbf{i}(0 - (-1 + 4\mathbf{i})) - 1 + 4\mathbf{i}$, puis $\boxed{z_{B_1} = -5 + 3\mathbf{i}}$.

J, centre du carré OBB_1B_2 est aussi le milieu de la diagonale $[OB_1]$, donc : $z_J = \frac{1}{2}(z_O + z_{B_1})$, d'où : $\boxed{z_J = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\mathbf{i}}$.

2) K est milieu de $[AB]$, donc : $z_K = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$, d'où : $\boxed{z_K = 1 + 3\mathbf{i}}$.

Calculons l'affixe du vecteur $\overrightarrow{KI}$: $z_{\overrightarrow{KI}} = z_I - z_K = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{i} - 1 - 3\mathbf{i} = \frac{3}{2} - \frac{7}{2}\mathbf{i}$. On en déduit $KI = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{13}}{2}}$.

De même : $z_{\overrightarrow{KJ}} = z_J - z_K = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\mathbf{i} - 1 - 3\mathbf{i} = -\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\mathbf{i}$, d'où : $KJ = \sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{58}}{2}}$.

On a $(\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KJ}) = \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{KJ}}}{z_{\overrightarrow{KI}}}\right)$. Or : $\dfrac{z_{\overrightarrow{KJ}}}{z_{\overrightarrow{KI}}} = \dfrac{-\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\mathbf{i}}{\frac{3}{2} - \frac{7}{2}\mathbf{i}} = \dfrac{-7 - 3\mathbf{i}}{3 - 7\mathbf{i}} = -\mathbf{i}$, et $\arg(-\mathbf{i}) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, donc : $\boxed{(\overrightarrow{KI, KJ}) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]}$. Comme de plus $KI = KJ = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$, cela entraîne que le triangle KIJ est **rectangle isocèle en** K.

Exercice 2 (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité, 5 points)

1) Désignons par S, C et D les événements suivants :

S **:** «l'article présente un défaut de soudure».

C **:** «l'article présente un défaut de composant».

D **:** «l'article est défectueux».

Par définition : $D = S \cup C$, donc $p(D) = p(S) + p(C) - p(S \cap C)$. De plus, S et C sont indépendants, donc $p(S \cap C) = p(S) \times p(C)$, par conséquent :

$$p(D) = p(S) + p(C) - p(S) \times p(C) = 0,03 + 0,02 - 0,03 \times 0,02 = 0,0494.$$

2) **a)** Les appareils sont identiques et indépendants (l'état d'un appareil n'a pas d'influence sur les autres). Le nombre d'appareils défectueux X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(800; 0,0494)$, et, pour tout entier k compris entre 0 et 800 :

$$p(X = k) = \binom{800}{k}(0,0494)^k(0,9506)^{800-k}.$$

b) L'espérance de X est $E(X) = 800 \times 0,0494 = 39,52$, c'est le nombre moyen d'appareils défectueux que le magasin peut espérer avoir.

3) Notons Y le nombre d'articles défectueux parmi les 25 articles achetés. Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(25; 0,0494)$.

a) On demande de calculer ici $p(Y \leqslant 2) = p(Y = 0) + p(Y = 1) + p(Y = 2)$:

$$p(Y \leqslant 2) = \binom{25}{0}(0,0494)^0(0,9506)^{25} + \binom{25}{1}(0,0494)^1(0,9506)^{24} + \binom{25}{2}(0,0494)^2(0,9506)^{23}.$$

On trouve $p(Y \leqslant 2) \simeq 0,876$ à 10^{-3} près.

b) Si Z désigne le nombre d'articles défectueux parmi les n achetés, Z suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n; 0,0494)$. La probabilité qu'au moins un appareil soit défectueux est alors donnée par : $p(Z \geqslant 1) = 1 - p(Z = 0) = 1 - (0,9506)^n$. On doit donc résoudre :

$$\begin{aligned} 1 - (0,9506)^n \leqslant 0,5 &\Leftrightarrow 0,5 \leqslant (0,9506)^n \\ &\Leftrightarrow \ln(0,5) \leqslant n \ln(0,9506) \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,9506)}}_{\simeq 13,68} \geqslant n \end{aligned}$$

Il ne doit donc pas commander plus de 13 articles.

4) Il s'agit de calculer $p([700, 1000]) = \displaystyle\int_{700}^{1000} 0,0007\mathrm{e}^{-0,0007x}\,\mathrm{d}x$. Une primitive de la fonction $x \mapsto 0,0007\mathrm{e}^{-0,0007x}$ est $x \mapsto -\mathrm{e}^{-0,0007x}$, donc :

$$p([700, 1000]) = \int_{700}^{1000} 0,0007\mathrm{e}^{-0,0007x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-0,0007x}\right]_{700}^{1000} \simeq 0,116 \text{ (à } 10^{-3} \text{ près).}$$

Exercice 2 (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité, 5 points)

1) **a)** On trouve sans difficulté : $(1+\sqrt{6})^2 = 7+2\sqrt{6}$, puis, en élevant à nouveau au carré : $(1+\sqrt{6})^4 = 73+28\sqrt{6}$. Enfin, en considérant que $(1+\sqrt{6})^6 = (1+\sqrt{6})^2\times(1+\sqrt{6})^4$, on obtient : $(1+\sqrt{6})^6 = 847+342\sqrt{6}$.

b) On a :

$$\begin{array}{rcl} 847 & = & 2\times 342+163 \\ 342 & = & 2\times 163+16 \\ 163 & = & 10\times 16+3 \\ 16 & = & 5\times 3+1 \end{array}$$

On en déduit que PGCD$(847, 342) = 1$, et donc que 847 et 342 sont **premiers entre eux**.

2) **a)** $(1+\sqrt{6})^1 = 1+\sqrt{6}$, donc : $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, on a également, d'après les calculs précédents : $a_2 = 7$, $b_2 = 2$; $a_4 = 73$, $b_4 = 28$; $a_6 = 847$, $b_6 = 342$.
$a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{6} = (a_n + b_n\sqrt{6})(1+\sqrt{6}) = (a_n + 6b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{6}$. Par identification :

$$a_{n+1} = a_n + 6b_n \text{ et } b_{n+1} = a_n + b_n.$$

b) On a : $a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n + 7b_n = 2(a_n + b_n) + 5b_n$.
Si 5 divise $a_{n+1} + b_{n+1}$, alors 5 divise $2(a_n + b_n) + 5b_n$, donc 5 divise $2(a_n + b_n)$. Comme 5 et 2 sont premiers entre eux, cela implique d'après le théorème de Gauss que : 5 divise $a_n + b_n$, ce qui contredit l'hypothèse.
Comme $a_1 + b_1 = 2$ et que 5 ne divise pas 2, on en déduit par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

c) Soit d un diviseur premier commun à a_{n+1} et b_{n+1}. L'existence de d est affirmée par le cours, et de plus $d \neq 5$ d'après la question précédente.
Comme $a_{n+1} - b_{n+1} = 5b_n$, on en déduit que d divise $5b_n$, donc que d divise b_n. Ce qui entraîne alors que d divise $a_n = b_{n+1} - b_n$. Ainsi d est un diviseur commun à a_n et b_n ; et comme on a supposé que a_n et b_n sont premiers entre eux, nécessairement $d = 1$, c'est-à-dire a_{n+1} et b_{n+1} premiers entre eux.
Comme a_1 et b_1 sont premiers entre eux, on en déduit par récurrence que a_n et b_n sont premiers entre eux, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Problème (11 points)

A. Résolution d'une équation différentielle

(E) $$y' - 2y = 2(\mathrm{e}^{2x} - 1).$$

1) $h(x) = 2x\mathrm{e}^{2x} + 1$ et $h'(x) = (4x+2)\mathrm{e}^{2x}$, donc :

$$h'(x) - 2h(x) = (4x+2)\mathrm{e}^{2x} - 4x\mathrm{e}^{2x} - 2 = 2\mathrm{e}^{2x} - 2 = 2(\mathrm{e}^{2x} - 1).$$

Autrement dit, h est solution de l'équation (E).

2)

(E') $$z' - 2z = 0$$

Montrons que : $\Big(y \text{ solution de (E)}\Big) \Leftrightarrow \Big(z \text{ solution de (E')}\Big)$.

: Supposons que y est solution de (E). On a $z = y - h$, donc $z' = y' - h'$, et :

$$z'(x) - 2z(x) = y(x) - h(x) - 2y'(x) + 2h'(x) = \underbrace{y(x) - 2y(x)}_{2(\mathrm{e}^{2x}-1)} - \underbrace{(h(x) - 2h'(x))}_{2(\mathrm{e}^{2x}-1)} = 0,$$

donc z est solution de (E').

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons que z soit solution de (E'). Alors :

$$y'(x) - 2y(x) = z'(x) + h'(x) - 2z(x) - 2h(x) = \underbrace{z(x)' - 2z(x)}_{0} + \underbrace{h(x)' - 2h(x)}_{2(\mathrm{e}^{2x}-1)} = 2(\mathrm{e}^{2x} - 1);$$

donc y est solution de (E).

Résolution de (E'). $z' - 2z = 0$ équivaut à $z' = 2z$, dont les solutions sont les fonctions de la forme $z(x) = K\mathrm{e}^{2x}$, où K est une constante réelle.

Résolution de (E). On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y = z + h$, c'est-à-dire : $y(x) = K\mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^{2x} + 1 = (2x + K)\mathrm{e}^{2x} + 1$.

3) Parmi les solutions précédentes, on cherche celle telle que : $y(0) = 0$, ce qui conduit à : $K + 1 = 0$, d'où $K = -1$.

B. Étude de la solution

1) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme combinaison simple de fonctions qui le sont) et on obtient : $g'(x) = 4x\mathrm{e}^{2x}$. Il en résulte que $g'(x)$ a le même signe que x. Le tableau de variations de g est donc le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

g admet en $x = 0$ son minimum qui vaut 0, on en déduit que, pour tout réel x : $g(x) \geqslant 0$.

2) **a)** $1 - g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow (1 - 2x)\mathrm{e}^{2x} \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - 2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{1}{2}$.

b) Calculons $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - g(x))\,\mathrm{d}x$ au moyen d'une intégration par parties.

Posons : $\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & 1 - 2x \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{2x} \end{array}\right.$, alors : $\left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & -2 \\ v(x) & = & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} \end{array}\right.$, et on a :

$$I = \left[\frac{1}{2}(1 - 2x)\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(1 - 2x)\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\mathrm{e}}{2} - 1.$$

c) Sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, la fonction g est positive, l'intégrale I représente donc l'aire du domaine plan délimité par : la courbe représentative de g, l'axe des abscisses, les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$, le résultat étant exprimé en unités d'aire.

C. Étude d'une fonction

1) **a)** **Limite en** $-\infty$**.** On a : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{2x} - 1) = -1$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$, donc par division : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.

Limite en 0**.** On a : $f(x) = 2 \times \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{2x} = 2 \times \dfrac{\mathrm{e}^{X} - 1}{X}$, où l'on a posé $X = 2x$. Or lorsque x tend vers 0, X tend vers 0 et on sait que $\displaystyle\lim_{X\to 0} \frac{\mathrm{e}^{X} - 1}{X} = 1$. On en déduit donc que : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 2}$.

Limite en $+\infty$**.** On a : $f(x)=2\times\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2x}-\dfrac{1}{x}$. Posons $X=2x$, alors $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2x}=\dfrac{\mathrm{e}^{X}}{X}$, et lorsque x tend vers $+\infty$, X tend vers $+\infty$; or (croissances comparées) : $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{X}}{X}=+\infty$, on en déduit donc que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2x}=+\infty$. Comme de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, on aura finalement : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ donc la droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$.

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (combinaison simple de fonctions dérivables) et :

$$f'(x)=\frac{(\mathrm{e}^{2x}-1)'(x)-(\mathrm{e}^{2x}-1)(x)'}{x^2}=\frac{2x\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{2x}+1}{x^2}=\frac{(2x-1)\mathrm{e}^{2x}+1}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}.$$

Par conséquent, comme $x^2>0$, $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ c'est-à-dire positif. On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2 $\Vert$ 2	$\nearrow$	$+\infty$

3)

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	$-0,2$	$-0,1$	$-0,05$	$0,05$	$0,1$	$0,2$	$0,5$	1
$f(x)$	0,49	0,63	0,86	1,26	1,64	1,81	1,90	2,10	2,21	2,46	3,43	6,39

4) La courbe représentative de f_1 est celle de f complétée du point $A(0,2)$. En A on trace la tangente T à cette courbe au jugé, son coefficient directeur donne alors une valeur approchée du nombre dérivé de f_1 en 0. Graphiquement, on trouve : $f_1'(0)\simeq 2$. On peut donc conjecturer que : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f_1(x)-2}{x}=2$.

D. Approximation d'une intégrale

Soit $x\in[-2;-1]$, alors :

$$-2\leqslant x\leqslant -1 \text{:} -4\leqslant 2x\leqslant -2\text{:}\mathrm{e}^{-4}-1\leqslant \mathrm{e}^{2x}-1\leqslant \mathrm{e}^{-2}-1.$$

Or $\mathrm{e}^{-4}-1\simeq -0,98\geqslant -0,99$ et $\mathrm{e}^{-2}-1\simeq -0,864\leqslant -0,86$, on a donc : $-0,99\leqslant \mathrm{e}^{2x}-1\leqslant -0,86$. En divisant chacun des membres de cette encadrement par x (qui est négatif!) on obtient bien :

$$-\frac{0,86}{x}\leqslant\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}\leqslant-\frac{0,99}{x}.$$

Sur $[-2;-1]$, la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est continue et admet comme primitive la fonction $x\mapsto\ln(-x)$, on a donc, en intégrant l'encadrement précédent :

$$-0,86\,[\ln(-x)]_{-2}^{-1}\leqslant J\leqslant -0,99\,[\ln(-x)]_{2}^{-1}\ \text{ soit, après calcul :}$$

$$0,59\leqslant J\leqslant 0,686.$$

Fig. 2 – Problème