Baccalauréat S Juin 2004 MAROC

Exercice 1: (6 points) Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique = 2cm.
On appelle A le point d'affixe -2i.
A tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = -2\bar{z} + 2i$

1. On considère le point B d'affixe b = 3 - 2i.
   Détermininer la forme algébrique des affixes a' et b' des points A' et B' associés respectivement aux points A et B. Placer ces points sur un dessin

2. Montrer que si M appartient à la droite (D) d'équation y = -2 alaors M' appartient aussi à (D).

3. Démontrer que pour tout point M d'affixe z , $|z' + 2i| = 2|z + 2i|$. Interpréter géométriquement cette égalité.

4. Pour tout point M distinct de A, on appelle q un argument de z + 2i.
   a) Justifier que q est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$.
   b) Démontrer que $(z + 2i)(z' + 2i)$ = est un réel négatif ou nul.
   c) En déduire un argument de z' + 2i en fonction de q.
   d) Que peut-on en déduire pour les demi-droites [AM) et [AM') ?

5. En utilisant les résultats précédents, proposer une construction géométrique du point M' associé au point M.

Exercice 2: (5 points) Spécialité

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant:
"*Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le chiffre 1 peuvent-ils être premiers* ?"

Pour tout entier naturel $p \geq 2$, on pose N_p = 1....1 où 1 apparaît p fois.

On rappelle dès lors que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + ... + 10^0$.

1. Les nombres $N_2 = 11$; $N_3 = 111$, $N_4 = 1111$ sont-ils premiers ?
2. Prouver que $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que 10^p-1 est divisible par 9 ?
3. On se propose de démontrer que si p n'est pas premier alors N_p n'est pas premier.
   a) On suppose que p est pair et on pose $q = 2p$, où q est un entier naturel > 1.
      Montrer que N_p est divisible par N_2 .
   b) On suppose que p est un multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel > 1.
      Monntrer que N_p est divisible par N_3 .
   c) On suppose que p non premier et on pose $p = \mathrm{k}q$, où k et q sont des entiers naturels > 1.
      Monntrer que N_p est divisible par N_k .
4. Enoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier.
   Cette condition est-elle suffisant ?

Exercice 2: (5 points) Pour les non-spécialité

Un employé se rend à son travail en bus. S'il est à l'heure il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend le bus de la ville, il lui en coûte 1,5 €.

Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$.

S'il est en retard un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.

Pour tout entier naturel non nul n , on appelle *Rn* l'événement: "l'employé est en retard le jour *n*".

On note p_n la probabilité de R_n et q_n celle de $\overline{R_n}$. On suppose que $p_1 = 0$.

1. Détermination d'une relation de récurrence.

   a: Déterminer les probabilités conditionnelles : $p_{R_n}(R_{n+1})$ et $p_{\overline{R}_n}(R_{n+1})$

   b: Déterminer $p(R_{n+1} \cap R_n)$ en fonction de p_n et $p(R_{n+1} \cap \overline{R_n})$ fonction de q_n .

   c: Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et q_n. .

   d: En déduire que $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n$

2. Etude de la suite (p_n)

   Pour tout entier natrel non nul n, on pose $v_n = p_n - \frac{4}{23}$

   a: Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$

   b: Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.

   c: Justifier que la suite (p_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 3 (9 points) Commun à tous les candidats

On s'intéresse à des courbes servant de modèle à la distribution de la masse salariale d'une entreprise. Les fonctions f associées, définies sur l'intervalle [0;1] doivent vérifier les conditions suivantes.

(1) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

(2) f est croissante sur l'intervalle [0;1].

(3) Pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0;1], $f(x) \leq x$.

Le plan est rapporté au repère orthonormal $R = (\mathrm{O} ; \mathrm{i} , \mathrm{j})$, unité graphique 10 cm.

I) Etude d'un modèle

On appelle g la fonction définie sur l'intervalle [0;1] par $g(x) = x\mathrm{e}^{x-1}$.

1. Prouver que g vérifie les conditions (1) et (2).
2. Montrer que $\mathrm{g}(x) - x = \frac{x}{\mathrm{e}}(\mathrm{e}^{x} - e)$ et en déduire que g vérifie la condtion (3).
3. Tracer les droites d'équations $y = x$ et $x = 1$ et la courbe représentative de g dans le repère R.

II) Un calcul d'indice

Pour une fonction f vérifiant les conditions (1) , (2) , (3), on définit un indice I égal à l'aire exprimée en unité d'aire, domaine plan démilité par les droites d'équations $y = x$, $x = 1$ et la courbe représentative de f.

1. Jusitifier que $\mathrm{I} = \int_0^1 (x - f(x))dx$
2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'indice I_g de g .
3. On s'intéresse aux fonction f_n définies sur l'intervalle [0;1] par : $f_n = \frac{2x^n}{1+x}$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On admet que ces fonctions vérifient les conditions (1),(2),(3) et on se propose d'étudier l'évolution de leur indice I_n lorsque n tend vers l'infini.

   a) On pose $\mathrm{I}_n = \int_0^1 (x - f_n(x))dx$ et $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.. Prouver que $\mathrm{I}_n = \frac{1}{2} - u_n$

   b) Comparer $\frac{t^{n+1}}{1+t}$ et $\frac{t^n}{1+t}$ sur l'intervalle [0;1]. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

   c) Prouver que pour tout réel t appartenant à l'intervalle [0;1], $0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$.

   d) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq \frac{2}{n+1}$.

   e) Déterminer alors la limite de (I_n) quand n tend vers l'infini.