Exercice 1 La Réunion Bac S 2003

1. Question 1

   Si on suppose qu'il n'y a pas d'erreur d'énoncé:

   Question a: FAUX.

   > Il suffit de comparer P(X=0) pour la loi binomiale et pour l'expérience de tirages sans remise.

   Question b : FAUX.

$$\mathrm{p}\ (X=0) = \text{ probabilité de n boules noires} = \frac{25\times 24\times ...\times(26-n)}{100\times 99\times ...\times(101-n)} \neq \frac{1}{2^{2n}}$$

   Question c : FAUX. 1-(p(X<5)+p(X>5))=p(X=5)≠0

   Question d : VRAI.

   > On note X_k la variable aléatoire rendant 1 si la kième boule est blanche et 0 si elle est noire.
   >
   > On a alors $X=X_1+X_2+...+X_n$ et $E(X)=E(X_1)+E(X_2)+...+E(X_n)$
   >
   > Soit $p_k(1)$ la probabilité que la boule 1 sorte au kième tirage.

$$\mathrm{p}_{\,k}(1) = \frac{99\times 98\times ...\times(101-k)\times 1}{100\times 99\times ...\times(101-k)} = \frac{1}{100}$$

   > $p(X_k=1)$=probabilité de sortir une des 75 blanches au kième tirage = 75/100.
   >
   > Donc $E(X_k)$=0,75 et $E(X)$ = 0,75n.

   Si on suppose qu'il y a erreur d'énoncé et que le tirage est avec remise.

   Question a: FAUX. Loi binomiale de paramètre n et 3/4.

   Question b : VRAI. $p(X=0)=(1/4)^n= (1/2^{2n})$.

   Question c : FAUX. Même raison que précédemment.

   Question d : VRAI. $E(X) = np$ = 0,75n.

   Question 2

   Question a: VRAI. $p_M(T)$=0,99 et $p_M(T)$=0,02 mais la somme ne veut rien dire.

   Question b : FAUX.

   Question c: VRAI. $p(T)=p(M)p_M(T)+ p(M)p_M(T)$= 0,01×0,99+0,99×0,2=0,0297

   Question d : VRAI.

$$\mathrm{p}_{\,T}(\overline{M}) = \frac{p(T\cap\overline{M})}{p(T)} = \frac{0{,}99\times 0{,}02}{0{,}0297} = \frac{2}{3}$$

   Question 3

   Question a : FAUX. La densité est $0{,}01e^{-0{,}01t}$

   Question b: VRAI. Formulaire.

   Question c : FAUX. $p(Y\leq 180)=1-e^{-1{,}8}\approx 0{,}83$.

   Question d : VRAI. $p(Y\geq 60)=e^{-0{,}6}\approx 0{,}55$

Exercice 2 La Réunion Bac S 2003

1. L'expression complexe de f est $z' = az+b$ où a est un complexe non nul. Donc f est une similitude directe. a étant différent de 1, c'est une similitude à centre.
   Si $z=i$ alors $z' = -i(3-i)-1+i(1+3)= i$. Donc Ω est le point invariant (ou centre) de f.
   Rapport de f=|a|=3+1=2.
   Angle de f = arg(a) = 7π/6 car cos(7π/6)=-3/2 et sin(7π/6)= -1/2.
2. Le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ a pour affixe z_0-i=3/4-1/4i.
   Ω M_0=|z_0-i|=3+1/4=1/2.
   $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\Omega M})$ = arg(z_0-i) = -π/6 car cos(-π/6) = 3/2 et sin(-π/6)= - 1/2.
3.
   a. Les points dessinent une spirale divergente de centre Ω.
   b. Initialisation: pour n = 0, $2^n=1$, $e^{i7n\pi/6}=1$ donc $z_0-i=2^0e^{i7\times 0\pi/6}(z_0-i)$.
   Transmission : Soit n un entier naturel, on suppose que $z_n-i=2^ne^{i7n\pi/6}(z_0-i)$. Puisque $M_{n+1}=f(M_n)$ alors $z_{n+1}-i=a(z_n-i)=2e^{i7\pi/6}(z_n-i)$.
   $z_{n+1}-i=2e^{i7\pi/6}\times 2^ne^{i7n\pi/6}(z_0-i)= 2^{n+1}e^{i7(n+1)\pi/6}(z_0-i)$.
   L'initialisation et la transmission prouvent que,
   pour tout entier n, $z_n-i=2^ne^{i7n\pi/6}(z_0-i)$.
   c. Ω M_n=|z_n-i|=$2^n\times 1/2=2^{n-1}$.
   Ω $M_n \geq 10^2 \Leftrightarrow 2^{n-1} \geq 10^2 \Leftrightarrow (n-1)\ln 2 \geq \ln(100) \Leftrightarrow n \geq 1+\ln(100)/\ln(2)$
   Première valeur où Ω M_n dépasse 100 : n_0=8.
4.
   a.
   On sait que l'équation $7x - 12y = 1$ admet comme solution particulière le couple (-5 ; -3).
   On a donc : 7x(-5) - 12x(-3) = 1. Donc, (x ; y) est une solution quelconque de cette équation si et seulement si ($7x-12y$)-(7x(-5) - 12x(-3)) = 0
   D'où (x ; y) solution si et seulement si $7(x+5) = 12(y+3)$
   Or, 7 et 12 sont premiers entre eux.
   Donc, la relation $7(x+5) = 12(y+3)$ implique que 7 divise (y+5).
   Il existe donc un entier relatif k tel que $(y+3)=7k$ d'où $y = 7k - 3$.
   D'où $7(x+5) = 12\times 7k$ d'où $(x+5) = 12k$ d'où $x = 12k$ -+ 5.
   On vérifie alors que la couple (12k - 5 ; 7k - 3) est bien une solution de l'équation pour tout entier relatif k.
   Les solution de (E) sont donc les couples (x = 12k - 5 ; y = 7k - 3) où k est un entier relatif quelconque.

   b. L'ensemble Δ est la demi-droite horizontale d'extrémité Ω d'équation y = 1 correspondant aux abscisses positives. Comme l'affixe de Ω est i , on peut dire que le point M d'affixe z est sur Δ si et seulement si ($z-i$) est un réel positif. Ceci signifie que l'argument de ($z-i$) est égal à 0 à 2π près.
   D'après le résultat de la question 3:b. , on peut alors dire que M_n appartient à Δ si et seulement si

$$\mathrm{Arg}\,[2^n \times \mathrm{e}^{\frac{7i\pi}{6}}(z_0 - i)] = 0 \mod 2\pi.$$

   On remarque alors 2^n est un réel > 0 et que $z_0 - i = \frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{6}}$.

On en déduit qu'à 2π près, un argument de (z_n - i) est $\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{6}$

M_n est donc sur Δ si et seulement si il existe un entier relatif m tel que :

$$\frac{7n\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = m2\pi \quad \text{ou encore } 7n - 12m = 1$$

Ceci signifie que la couple (n ; m) est solution de (E) mais avec en plus la condition n positif.
En déduit qu'il existe un entier relatif k tel que $n = 12k - 5$ et $m = 7k - 3$.
Le plus petit entier positif n solution correspond à $k = 1$. On a alors $n = 7$.
La valeur de z_n correspondante est alors : $z_7 = 64 + i$.