**Problème** La Réunion Bac S 2003

1.
   a. Pour tout $x$ de ]0;+∞[, on a: $u(x) - u'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x^2}$

   donc $u$ est solution de (E).

   b. $v$ est solution de (E) si et seulement si, pour tout $x$ de ]0;+∞[ $v(x) - v'(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

   Or $\frac{e^x}{x^2} = u(x) - u'(x)$).

   Donc v est solution de (E) ⇔ $v - v' = u - u'$ ⇔ $v - u - (v' - u') = 0$ ⇔ $v - u$ est solution de $y$-$y'$=0

   c. Les solutions de l'équation $y - y' = 0$ définies sur ]0;+∞[ sont les fonctions $f$ telles que $f(x) = Ce^x$ où C est un réel quelconque.

   $v$ est solution de (E) si et seulement si il existe un réel C, tel que, pour tout $x$ de ]0;+∞[, $v(x)-u(x)=Ce^x$ ⇔ $v(x) = Ce^x + e^x/x$

2. $k \leq 0$ et $f_k(x) = \frac{kx+1}{x}e^x = (k + \frac{1}{x})e^x$

   a. Pour tout réel k $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f_k(x) = +\infty$

   Pour tout réel $k < 0$:

   $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $k < 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = -\infty$

   Pour $k = 0$:

   $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = +\infty$

   b. La fonction $f_k$ est dérivable sur ]0;+∞[ comme produit et quotient de fonctions dérivables.

   Pour tout $x$ de ]0;+∞[

   $$f'_k(x) = -\frac{1}{x^2}e^x + (k + \frac{1}{x})e^x = \frac{kx^2 + x - 1}{x^2}e^x.$$

   $f'_k(x)=0$ ⇔ $kx^2+x-1=0$.

   Si $k = 0$, l'équation $f'_k(x)=0$ admet une unique solution 1.

   Si $k$ non nul, on calcule le discriminant $1+4k$.

   Si $k < -1/4$ alors le discriminant est négatif et l'équation $f'_k(x)=0$ n'admet pas de solution.

   Si $k = -1/4$ alors le discriminant est nul et l'équation $f'_k(x)=0$ admet une solution double et la dérivée garde un signe constant.

   Si $0>k > -1/4$ alors le discriminant est positif et l'équation $f'_k(x)=0$ admet deux solutions réelles dont la somme est $-1/k$ et le produit $-1/k$. Ces solutions sont donc de même signe et positives. Donc deux solutions dans ]0;+∞[.

3. Si $k=-1$ alors $k<-1/4$ donc la dérivée ne s'annule pas, courbe (3).
   Si $k=-1/4$ alors la dérivée s'annule sans changer de signe donc courbe (4).
   Si $k=-0,15$ alors $-1/4<k<0$ donc la dérivée s'annule deux fois, courbe (2).
   Si $k=0$ la dérivée s'annule une fois en 1 donc courbe (1).

4.
   a. $A(a)$ représente l'aire de la surface comprise entre $(C_0)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x=a+1$.

b. $A(a)=F(a+1)-F(a)$ si $F$ est une primitive de $f_0$.

$$A'(a)=F'(a+1)-F'(a)=f_0(a+1)-f_0(a)=\frac{e^{a+1}}{a+1}-\frac{e^a}{a}=\frac{e^a}{a(a+1)}(ea-a-1)$$

$A'(a)$ est du signe de $a(e-1)-1$ car $e^a/a(a+1)>0$.

$A'(a)$ s'annule en $1/(e-1)$, est d'abord négatif puis positif.

$A$ est donc décroissante puis croissante et atteint un minimum en $1/(e-1)$.

c. L'aire que l'on cherche à minimiser est $A(a)$. $A(a)$ est minimale pour $a=1/(e-1)$. Il suffit donc de découper suivant les droites d'équations $x=1/(e-1)$ et $x=e/(e-1)$