

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S La Réunion juin 2007 ∞

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.

On désigne par A et par B les points d'abscisses respectives a et b de la courbe Γ représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Les points Q et R sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur l'axe des ordonnées.

- Donner l'équation réduite de la tangente (T) au point A à la courbe Γ .
 - Déterminer l'ordonnée du point d'intersection P de (T) avec l'axe des ordonnées.
Calculer la longueur PQ. En déduire une construction simple de (T) ; la réaliser sur la figure en annexe).

2. **Restitution organisée de connaissances**

On suppose connue la propriété :

« Pour tout couple $(x ; y)$ de nombres réels strictement positifs, on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. »

En déduire que, pour tout nombre réel m strictement positif, on a

$$\ln(\sqrt{m}) = \frac{1}{2} \ln(m).$$

- Utiliser le résultat de la question 2 pour placer sur l'axe des abscisses le point G d'abscisse \sqrt{ab} . Expliquer la construction et la réaliser sur la figure de l'annexe 1 (on laissera les traits de construction apparents).

EXERCICE 2

4 points

Commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel tel que $-1 < a < 0$.

On considère la suite u définie par $u_0 = a$, et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n.$$

- Étudier la monotonie de la suite u .
- Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = x^2 + x$. Étudier le sens de variations de la fonction h .
En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $] -1 ; 0[$, le nombre $h(x)$ appartient aussi à l'intervalle $] -1 ; 0[$.
 - Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $-1 < u_n < 0$.
- Étudier la convergence de la suite u . Déterminer, si elle existe, sa limite.

EXERCICE 3

6 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Déterminer la limite de f en $-\infty$.

- b. Établir que, pour tout nombre réel x non nul, on a $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{e^x - 1} \right)$.
En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Donner, sans démontrer, la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1}$ et démontrer que f est continue en 0.
3. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x , on a : $e^x \geq x + 1$, et que l'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.
b. Calculer la dérivée f' de la fonction f et déterminer la fonction g telle que, pour tout nombre réel x non nul, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^2}$.
c. Donner le tableau des variations de f .
4. Soient x un nombre réel non nul et les points $M(x; f(x))$ et $M'(-x; f(-x))$ de la courbe \mathcal{C} .
a. Établir que $f(-x) = \frac{x}{e^x - 1}$, puis déterminer le coefficient directeur de la droite (MM') .
b. On admet que la fonction f est dérivable en 0. Que suggère alors le résultat précédent ?

EXERCICE 4**5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . A, B, C désignent les points d'affixes respectives $a = -2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - 3i$ et $c = 2i$.

1. a. Écrire b sous forme exponentielle.
b. Les points A et C sont représentés sur la figure jointe en annexe 2.
Construire à la règle et au compas le point B sur ce dessin (laisser les traces de construction apparentes).
2. On désigne par E le barycentre du système $\{(A; 1); (C; 3)\}$ et par F le barycentre du système $\{(A; 2); (B; 1)\}$.
a. Établir que l'affixe e du point E est égale à $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.
b. Déterminer l'affixe f du point F.
3. a. Démontrer que le quotient $\frac{e - c}{e - b}$ peut s'écrire ki où k est un nombre réel à déterminer.
En déduire que, dans le triangle ABC, le point E est le pied de la hauteur issue de B. Placer le point E sur le dessin.
b. Démontrer que le point F possède une propriété analogue. Placer F sur le dessin.
4. On désigne par H le barycentre du système $\{(A; 2); (B; 1); (C; 6)\}$. Démontrer que le point H est le point d'intersection des droites (BE) et (CF).
Qu'en déduit-on pour le point H ?

EXERCICE 4**5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . A, B, C, désignent les points d'affixes respectives $a = -2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - 3i$ et $c = 2i$.

1. a. Écrire b sous forme exponentielle.
b. Les points A et C sont représentés sur la figure jointe en annexe 2.
Construire à la règle et au compas le point B sur ce dessin (laisser les traces de construction apparentes).

- c. Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\vec{u} ; \overrightarrow{AB})$ et de l'angle $(\vec{u} ; \overrightarrow{AC})$.
2. Les points E et F ont pour affixes respectives $e = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ et $f = -\sqrt{3} - i$.
- a. Démontrer que les points A, E et C, d'une part, et les points A, F et B, d'autre part, sont alignés,
- b. Démontrer que le quotient $\frac{e-c}{e-b}$ peut s'écrire ki où k est un nombre réel à déterminer.
Interpréter géométriquement ce résultat.
On admet que, de façon analogue, $\frac{f-c}{f-b}$ peut s'écrire $k'i$ où k' est un nombre réel non nul que l'on ne demande pas de déterminer.
- c. Placer les points E et F sur la figure.
3. On désigne par S la similitude indirecte dont l'écriture complexe est

$$z \mapsto \frac{1}{2}\bar{z} - \sqrt{3}.$$

Déterminer les images par S des trois points A, B et C.

4. Soit H le point d'intersection des droites (BE) et (CF). Placer le point $S(H)$ sur la figure.

ANNEXE 1
(À rendre avec la copie)

Exercice 1

