Corrigé Baccalauréat S Antilles-Guyane Juin 2008

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A :

1. (E')$\Longleftrightarrow y' = -2y$.
   On sait que les solutions de (E') sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ Y(x) = C\mathrm{e}^{-2x},\text{ où } C \text{ est une constante réelle}$$
2. En particulier, pour $C = \dfrac{9}{2}$, on obtient comme solution particulière la fonction h.
3. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 9\mathrm{e}^{-3x}$.
   Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) + 2g(x) = 9\mathrm{e}^{-3x} - 6\mathrm{e}^{-3x} = 3\mathrm{e}^{-3x}$.
   Donc g est bien solution de (E).
4. Comme $f = g + h$, on a $f' = g' + h'$, donc, $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $$f'(x) + 2f(x) = \underbrace{g'(x) + 2g(x)}_{3\mathrm{e}^{-3x}} + \underbrace{h'(x) + 2h(x)}_{0} = 3\mathrm{e}^{-3x}$$
   f est donc bien solution de (E).

Partie B :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 3\mathrm{e}^{-3x} = 3\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{-2x}}\right) = 3\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right)$.
2. – **Limite de f en $-\infty$.**
   $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-2x} = +\infty$.
   De même $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-3x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right) = -\infty$.
   On en déduit, par opérations sur les limites dans l'expression de $f(x)$ obtenue à la question B1 que
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
   – **Limite de f en $+\infty$.**
   $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-2x} = 0$.
   De même $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-3x} = 0$.
   On en déduit par opérations sur les limites dans l'expression initiale de $f(x)$ que
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
   Graphiquement, cela signifie que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions qui le sont), et, $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $$f'(x) = \frac{9}{2}\times(-2)\mathrm{e}^{-2x} - 3\times(-3)\mathrm{e}^{-3x} = -9\mathrm{e}^{-2x} + 9\mathrm{e}^{-3x} = 9\mathrm{e}^{-3x}\left(-\mathrm{e}^{x} + 1\right)$$
   Comme, pour tout réel x, $9\mathrm{e}^{-3x} > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $-\mathrm{e}^{x} + 1$.
   Or : $-\mathrm{e}^{x} + 1 \leqslant 0 \Longleftrightarrow 1 \leqslant \mathrm{e}^{x} \Longleftrightarrow 0 \leqslant x$, donc $f'(x) \leqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant 0$.
   Par ailleurs $f(0) = \dfrac{9}{2}e^0 - 3e^0 = \dfrac{3}{2}$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$3/2$	$\searrow$	0

4. – **Intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe** (Ox).

On cherche les points de coordonnées $(x; f(x))$ tels que $f(x) = 0$.

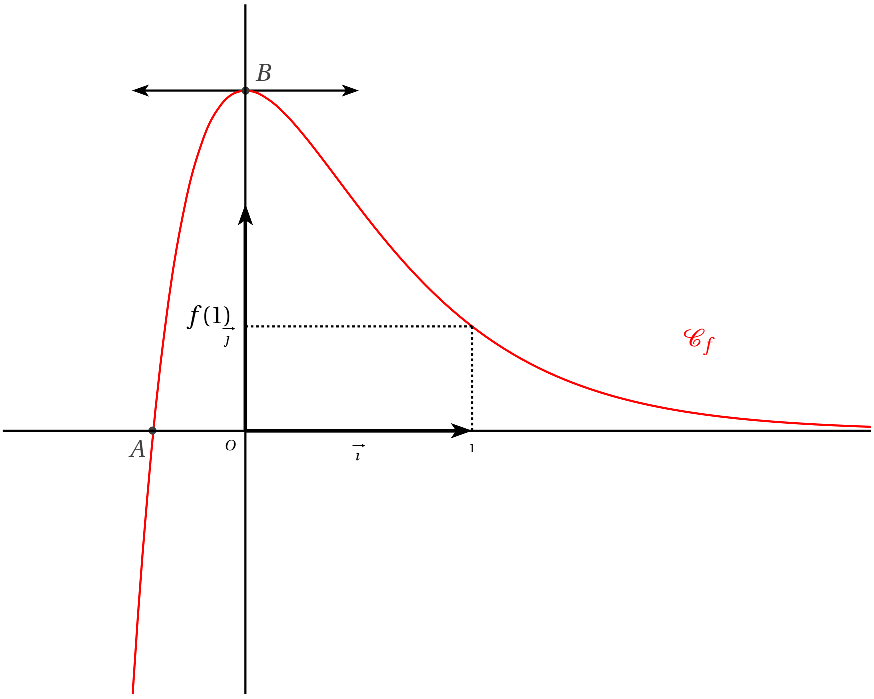
D'après l'expression de la question B1, et comme pour tout réel x, $e^{-2x} \neq 0$, on a : $f(x) = 0 \iff \dfrac{3}{2} = e^{-x} \iff \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) = -x \iff x = \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) \simeq -0,4$ (à 0,01 près).

La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe (Ox) en un seul point A de coordonnées $\left(\ln\left(\dfrac{2}{3}\right); 0\right)$.

– **Intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe** (Oy).

Il s'agit du point de coordonnées $B(0; f(0))$ c'est-à-dire $\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$.

5. $f(1) = \dfrac{9}{2}e^{-2} - 3e^{-3} \simeq 0,46$ (à 0,01 près). L'allure de $\mathscr{C}_f$ est alors la suivante :



6. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto -\dfrac{9}{4}e^{-2x} + e^{-3x}$.

Sur l'intervalle $[0; 1]$, la fonction f est positive, l'aire $\mathscr{A}$ cherchée est donc égale à :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_0^1 f(x)\,dx \\
\mathscr{A} &= \left[-\frac{9}{4}e^{-2x} + e^{-3x}\right]_0^1 \\
\mathscr{A} &= \left(-\frac{9}{4}e^{-2} + e^{-3}\right) - \left(-\frac{9}{4} + 1\right) \\
\mathscr{A} &= \left(-\frac{9}{4}e^{-2} + e^{-3} + \frac{5}{4}\right)\text{cm}^2.
\end{aligned}$$

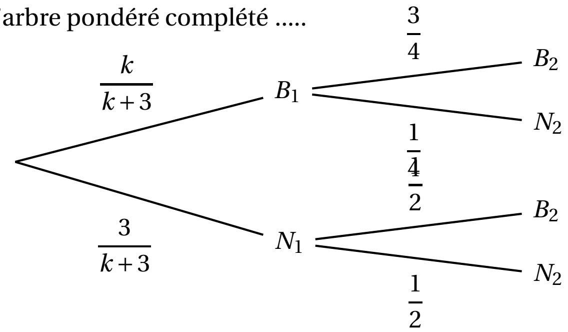
EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. **a.** Dans U_1 il y a k boules blanches et 3 noires, soit $k+3$ boules au total ; on a donc :

$$p(B_1) = \frac{k}{k+3} \quad \text{et} \quad p(N_1) = \frac{3}{k+3}$$

Si l'on a tiré une boule blanche de U_1 il y a maintenant 3 boules blanches et une boule noire dans U_2 ; en revanche si l'on a tiré une boule noire de U_1 il y a maintenant 2 boules blanches et 2 boules noires dans U_2. D'où l'arbre pondéré complété .....



b. Les événements B_1 et N_1 étant contraires, on a $B_2 = (B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap B_2)$, et la formule des probabilités totales permet alors d'écrire que :

$$p(B_2) = \frac{3}{4} \times \frac{k}{k+3} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{k+3} = \frac{3k+6}{4k+12}, \text{ ce qu'il fallait démontrer}$$

2. **a.** Si le joueur gagne, il reçoit 12 euros et en a misé 8, son gain est donc de 4 euros : $X = 4$.
S'il perd, il perd sa mise et $X = -8$.
Les valeurs possibles de X sont donc bien 4 et -8.

b.

$$p(X=4) = p(B_2) = \frac{3 \times 12 + 6}{4 \times 12 + 12} = \frac{42}{60} = \frac{7}{10}$$

$$p(X=-8) = p\left(\overline{X=4}\right) = 1 - p(X=4) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

On peut résumer la loi de X dans le tableau suivant :

x_i	-8	4	Total
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	1

c. L'espérance mathématique de X est : $E(X) = \frac{3}{10} \times (-8) + \frac{7}{10} \times 4 = \frac{4}{10} = 0,40$ euros.

d. Le jeu est favorable au joueur car $E(X) > 0$.

3. Les épreuves successives étant identiques et indépendantes, on a affaire à un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire Y qui compte le nombre de fois où l'on a obtenu l'événement B_2 suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n; \frac{7}{10}\right)$.
Donc :

$$\begin{aligned}
p(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - p(Y=0) \geqslant 0,99 \\
&\iff 1 - \left(\frac{3}{10}\right)^n \geqslant 0,99 \\
&\iff 0,01 \geqslant \left(\frac{3}{10}\right)^n \\
&\iff \ln(0,01) \geqslant n \ln\left(\frac{3}{10}\right) \\
&\iff \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{3}{10}\right)} \leqslant n.
\end{aligned}$$

Et comme $\frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{3}{10}\right)} \simeq 3,82$, le plus petit entier n répondant à la question est 4.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. $11 \times (-7) - 26 \times (-3) = -77 + 78 = 1$, donc le couple $(-7\,;\ -3)$ est solution de (E).
2. – $(x; y)$ une solution de (E) si et seulement si $11x - 26y = 11 \times (-7) - 26 \times (-3)$
   donc, si et seulement si $11(x+7) = 26(y+3)$..
   Donc 26 divise $11(x+7)$, or 26 et 11 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss implique donc que 26 divise $x+7$.
   Il existe donc un entier relatif k tel que $x + 7 = 26k$, c'est-à-dire $x = -7 + 26k$.
   On a alors $11 \times 26k = 26(y+3)$, d'où, en divisant par 26 : $11k = y + 3$, d'où $y = -3 + 11k$.
   Ainsi, si $(x; y)$ est solution de (E) alors il existe un entier k tel que $(x; y) = (-7 + 26k; -3 + 11k)$.
   – Réciproquement, on vérifie que ces couples sont bien solutions de (E).
   $11 \times (-7 + 26k) - 26 \times (-3 + 11k) = -77 + 286k + 78 - 286k = 1$.
   – En conclusion, les solutions de (E) sont les couples de la forme $(-7 + 26k; -3 + 11k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.
3. $(u; v)$ est solution de (E) avec $0 \leqslant u \leqslant 25$ si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que

$$u = -7 + 26k\,,\ v = -3 + 11k \ \text{ et } 0 \leqslant -7 + 26k \leqslant 25$$

Cela conduit à $7 \leqslant 26k \leqslant 32$, et $k = 1$ est la seule possibilité.
L'unique couple répondant à la question est donc $(19; 8)$.

Partie B

1. La lettre W est chiffrée par $x = 22$.
   Mais $11 \times 22 + 8 = 250 \equiv 16\ [26]$, donc $y = 16$ qui correspond à la lettre Q.
2. **a.** – Remarquons que $19 \times 11 = 209$ et $209 \equiv 1\ [26]$.
   Soit x et j deux entiers relatifs tels que $11x \equiv j\ [26]$.
   Alors, en multipliant par 19, on peut écrire que $19 \times 11x \equiv 19j\ [26]$.
   C'est à dire que $209x \equiv 19j\ [26]$, ou encore $x \equiv 19j\ [26]$.
   – Réciproquement, si $x \equiv 19j\ [26]$, alors, en multipliant par 11 : $11x \equiv 209j\ [26]$, d'où $11x \equiv j\ [26]$.
   L'équivalence est donc démontrée.

   b. Soit y un entier compris entre 0 et 25, il s'agit de trouver un entier x compris entre 0 et 25 tel que : $11x + 8 \equiv y\ [26]$.
   D'après la question précédente, on a :

$$11x + 8 \equiv y\,[26] \Longleftrightarrow 11x \equiv y - 8\,[28] \Longleftrightarrow x \equiv 19(y-8)\ [26]$$

Mais, $19(y-8) \equiv 19y - 152\,[26]$ et $-152 \equiv 4\,[26]$, on peut donc dire que :

$$11x + 8 \equiv y\,[26] \iff 19y + 4 \equiv x\,[26]$$

Si on appelle f l'application de $E = \{0; 1; 2; \cdots; 25\}$ dans E définie par

$$\forall x \in E,\ f(x) = (11x + 8)\ [26]$$

ce qui n'est rien d'autre que la fonction Codage de l'énoncé, on peut dire que l'application g de E dans E définie par

$$\forall x \in E,\ g(x) = (19x + 4)\ [26]$$

est la foncion Décodage !
On a bien

$$\forall x \in E,\ g \circ f(x) \equiv (19(11x + 8) + 4) \equiv 209x + 156 \equiv x\,[26]$$

car $209 \equiv 1\ (26]$ et $156 \equiv 0\ [26]$.
Pour décoder un lettre x, il suffit alors de calculer $g(x)$.
Par exemple, si le codage a donner la lettre K, comme K correspond la valeur $x = 10$, la lettre initiale correspond à $g(10) = 12$. Donc, la lettre initiale est M.

   c. W correspond à 22. Or $g(22) = 6$, ce qui correspond à la lettre G.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. A :

Explication

– On observe les équations cartésiennes de ces deux plans, et on remarque que les vecteurs $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{m}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux respectifs des plans (P) et (Q) d'équations respectives $2x-6y+2z-7=0$ et $-x+3y-z+5=0$.
Ces deux vecteurs sont colinéaires (coordonnées proportionnelles !).
Donc, ces deux plans sont parallèles.
Mais le point $A(5\,;\,0\,;\,0)$ appartient à (Q) sans appartenir à (P).
Donc, (P) et (Q) sont strictement parallèles, leur intersection est vide.

2. C :

Explication

– On peut tout de suite voir que les vecteurs directeurs de ces deux droites ne sont pas colinéaires ! Donc, ces deux droites ne sont ni parallèles, ni confondus !
Pour voir si elles sont sécantes, il s'agit de voir s'il existe deux réels t et t' tels que

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1-t & = & 2+t' \\ -1+t & = & -2-t' \\ 2-3t & = & 4+2t' \end{array}\right.$$

Un rapide calcul montre que l'on a aors $t=0$ et $t'=-1$.
On a donc un point d'intersection A entre ces deux droites qui a pour coordonnées (1 ; -1 ; 2).

3. B :

Explication

– On sait que si le plan (P) a pour équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ dans un repère orthonormé, et si A a pour coordonnées $(x_a\,;\,y_a\,;\,z_a)$ dans ce même repère, alors la distance de A à (P) est donnée par :

$$\text{Distance}(A,P)=\frac{|ax_a+by_a+cz_a+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

D'où la réponse B !

4. C :

Explication

– Les points de coordonnées (2 ; 3 ; 1) et (-2 ; 3 ; -6) n'appartiennent pas au plan d'équation $-x+3y-z+5=0$ car leurs coordonnées ne vérifient pas cette équation !
Donc, les réponses B et D sont déjà exclues !
Il reste donc les réponses A et C !
Mais la distance entre $B(1\,;\,6\,;\,0)$ et le plan (P) d'équation $-x+3y-z+5=0$ est :

$$\text{Distance}(B,P)=\frac{|ax_b+by_b+cz_b+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=2\sqrt{11}\ \text{.... après calcul !}$$

La distance entre B et le point de la réponse A est $3\sqrt{6}$. .... La réponse A est donc exclue !
On vérifie tout de même que la distance entre B et le point de la réponse C est bien $2\sqrt{11}$....

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **Un exemple.**

   a. Voir figure à la fin de la correction !

   b. Le point K' a pour affixe $z_{K'} = \dfrac{-(1+i)^2}{1+i-i} = -2i$.

   c. Voir figure à la fin de la correction !

2. **Des points pour lesquels le problème ne se pose pas.**

   a. L' a pour affixe $z_{L'} = \dfrac{-\left(\frac{i}{2}\right)^2}{\frac{i}{2}-i} = \dfrac{-\left(\frac{i}{2}\right)^2}{-\frac{i}{2}} = \dfrac{i}{2}$. On remarque ainsi que $L' = L$.

   b. Soit M un point du plan complexe d'affixe $z \neq i$. Alors :

$$\left(f(M) = M\right) \Longleftrightarrow \left(z = \frac{-z^2}{z-i}\right) \Longleftrightarrow \left(z(z-i) = -z^2\right) \Longleftrightarrow \left(z(2z-i) = 0\right) \Longleftrightarrow \left(z = 0 \text{ ou } z = \frac{i}{2}\right).$$

   Il n'y a donc que deux points invariants par f : O et L.

3. **Un procédé de construction.**

   a. On a : $g = \dfrac{i+z+z'}{3} = \dfrac{i+z-\frac{z^2}{z-i}}{3} = \dfrac{(z-i)(z+i)-z^2}{3(z-i)} = \dfrac{z^2+1-z^2}{3(z-i)} = \dfrac{1}{3(z-i)}$.
   L'égalité est vérifiée.

   b. Soit M est un point du cercle de centre A de rayon r, alors $AM = r$, donc $|z-i| = r$.
   D'après la relation précédente, cela implique que $|g| = \dfrac{1}{3r}$, donc que G appartient au cercle de centre O de rayon $\dfrac{1}{3r}$.

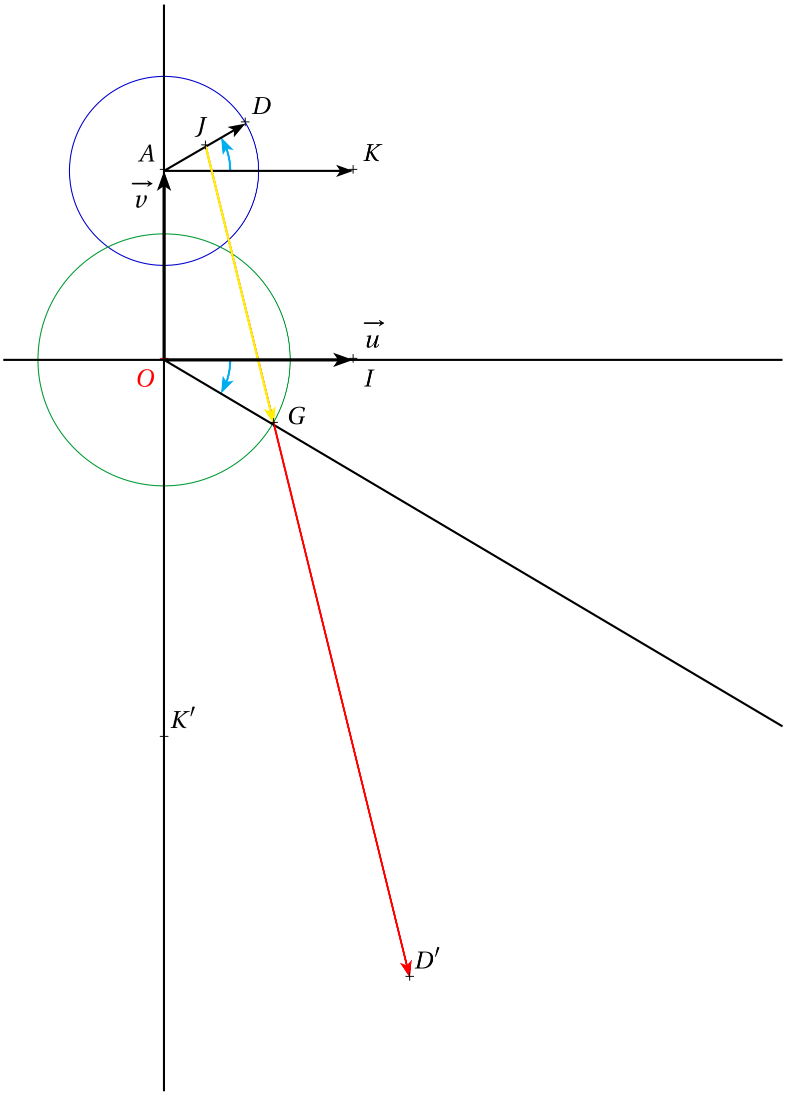
   c. D'après la relation de la question 3a :

$$\arg(g) = \arg\left(\frac{1}{3(z-i)}\right) = -\arg(3(z-i)) = -\arg 3 - \arg(z-i) = -\arg(z-i) = -\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{AM}\right).$$

   d. Construction du point D' :

   – on construit le point G, point d'intersection du cercle de centre O et de rayon $\dfrac{2}{3}$ et de la demi-droite d'origine O faisant un angle de $-(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{AD})$ avec l'horizontale ;

   – G est le centre de gravité du triangle ADD', en notant J le milieu de $[AD]$ on a donc : $\overrightarrow{JD'} = 3\overrightarrow{JG}$.


D
J
A
K
$\vec{v}$
$\vec{u}$
O
I
G
K'
D'