

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2008 ∞
(spécialité)

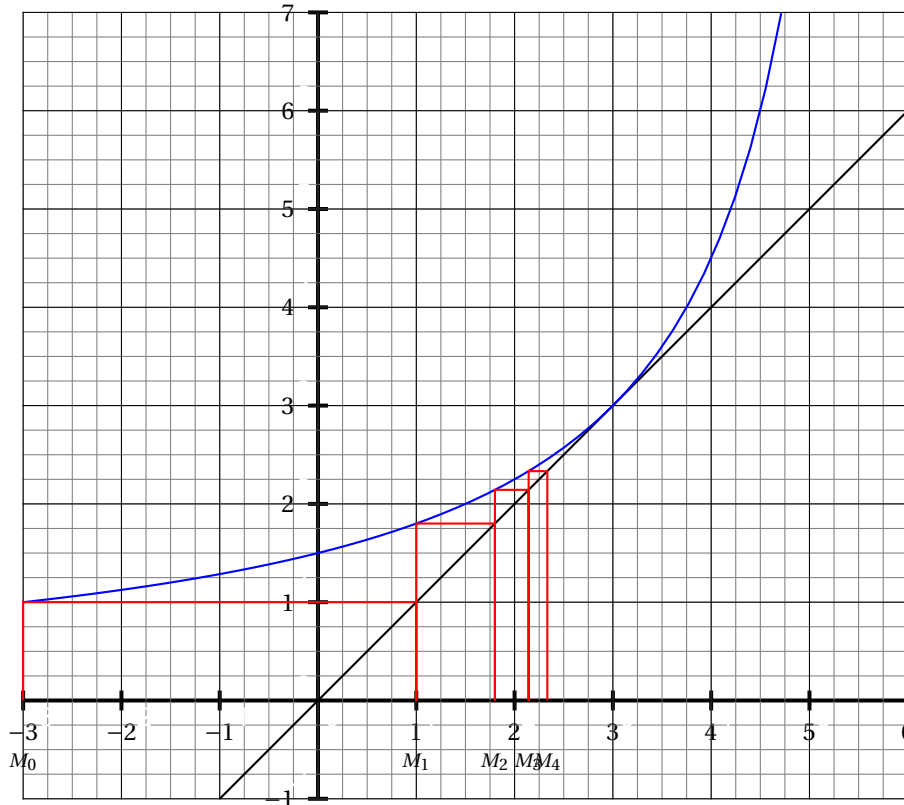
EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

ANNEXE (à rendre avec la copie)

1.



On peut conjecturer que :

- la suite est croissante ;
- la suite converge vers 3.

2. a. $x < 3 \Leftrightarrow -3 < -x \Leftrightarrow 6 - 3 < 6 - x \Leftrightarrow 3 < 6 - x \Leftrightarrow \frac{1}{6-x} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 9 \times \frac{1}{6-x} < 9 \times \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{9}{6-x} < 3.$

On vient donc de démontrer que si $x < 3$, alors $f(x) < 3$.

Par récurrence immédiate : de $U_0 < 3$ et de $U_n < 3$ entraîne $U_{n+1} = f(U_n) < 3$, on déduit aussitôt que $U_n < 3$ pour tout entier naturel n .

b. On a $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = \frac{9}{6-U_n} - U_n = \frac{9 - 6U_n + U_n^2}{6-U_n} = \frac{(U_n - 3)^2}{6-U_n}.$

On vient de démontrer que $U_n < 3 < 6$, donc le dénominateur est positif et le numérateur (carré) aussi.

On a donc $U_{n+1} - U_n > 0 \Leftrightarrow U_{n+1} > U_n$: la suite est croissante (strictement).

c. La suite (U_n) est croissante et majorée par 3 : elle converge vers une limite inférieure ou égale à 3.

3. Soit la suite définie par $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$ pour tout entier naturel n .

a. Calculons la différence $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1} - 3} - \frac{1}{U_n - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6-U_n} - 3} - \frac{1}{U_n - 3} =$
 $\frac{6 - U_n}{9 - 18 + 3U_n} - \frac{1}{U_n - 3} = \frac{6 - U_n}{3U_n - 9} - \frac{1}{U_n - 3} = \frac{6 - U_n}{3(U_n - 3)} - \frac{1}{U_n - 3} = \frac{6 - U_n - 3}{3(U_n - 3)} =$
 $\frac{3 - U_n}{3(U_n - 3)} = -\frac{1}{3}$. On vient donc de démontrer que la suite (V_n) est une
 suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

b. On a $V_0 = \frac{1}{-3 - 3} = -\frac{1}{6}$.

On sait que $V_n = V_0 + n \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{6} - \frac{2n}{6} = -\frac{2n+1}{6}$.

Or $U_n - 3 = \frac{1}{V_n} = \frac{-6}{2n+1}$.

c. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-6}{2n+1} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n - 3 = 0$ et finalement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 3.$$

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A : Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?

Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

1. a. Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 :

$$N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$$

On a donc $N_1 = 11 \times 12^2 + 1 \times 12^1 + 10 = 1606$.

b. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 : $N_2 = 1131$.

La plus grande puissance de 12 contenue dans 1131 est 12^2 et $1131 = 7 \times 144 + 123 = 7 \times 12^2 + 10 \times 12 + 3$.

On a donc $N_2 = \overline{7 \alpha 3}^{12}$.

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 :

$$N = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}^{12}$$

2. a. On a pour $1 \leq i \leq n$, $a_i \times 12^i \equiv 12 \pmod{3}$, donc $a_i \times 12^i \equiv 3 \pmod{3}$. Donc $N \equiv a_0 \pmod{3}$.

Pn en déduit que si a_0 est un multiple de 3, N l'est aussi. (ou encore N est multiple de 3 s'il se termine par 0, 3, 6 ou 9.

b. Comme $N_2 = \overline{7 \alpha 3}^{12}$, il est donc multiple de 3. De son écriture décimale (1131) et de $1 + 1 + 3 + 1 = 6$ est multiple de 3, donc 1131 l'est aussi.

3. a. On a $N = \sum_{i=0}^n a_i \times 12^i$. Quel que soit i tel que $1 \leq i \leq n$, $12^i = (11 + 1)^i$. En

développant cette puissance avec la formule du binôme, tous les termes de la somme sont congrus à 11 sauf le dernier : autrement dit $a_i \times 12^i \equiv a_0 \pmod{11}$ et finalement $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0 \pmod{11}$.

Conclusion : un nombre écrit en base 12 est un multiple de 11 si la somme des nombres représentant ses chiffres est elle-même un multiple de 11.

b. Ainsi pour N_1 , comme $\beta + 1 + \alpha$ soit $11 + 1 + 10 = 22 = 2 \times 11$, N_1 est un multiple de 11.

En écriture décimale $1606 = 146 \times 11$, montre bien que N_1 est un multiple de 11.

4. Des questions 2. et 3. on déduit que $N = \overline{x4y}^{12}$ est un multiple de 3 et de 11 et donc de 3×11 , puisque ces deux nombres sont premiers entre eux, si :

$$\begin{cases} y & = & 0 & (3) \\ x+4+y & = & 11k \end{cases}$$

$$- y = 0 \Rightarrow x = 7$$

$$- y = 3 \Rightarrow x = 4$$

$$- y = 6 \Rightarrow x = 1$$

$$- y = 9 \Rightarrow x = 9$$

Les solutions sont donc les nombres $\overline{740}^{12}$, $\overline{443}^{12}$, $\overline{146}^{12}$, $\overline{949}^{12}$.

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

1. a. La probabilité qu'un alevin de premier élevage soit vivant au bout de trois mois est 0,9 et celle d'un alevin du deuxième élevage 0,95.

La probabilité pour l'enfant d'avoir un alevin vivant est donc $0,6 \times 0,9 + 0,4 \times 0,95 = 0,54 + 0,38 = 0,92$.

b. De même la probabilité pour l'enfant d'avoir un poisson rouge est égale à $0,6 \times 0,75 + 0,4 \times 0,65 = 0,45 + 0,26 = 0,71$.

c. Les poissons vivants sont rouge ou gris. La probabilité d'avoir un alevin gris est donc égale à $0,92 - 0,71 = 0,21$.

La probabilité qu'il soit gris et provienne du premier élevage est égale à $0,6 \times 0,15 = 0,09$.

$$\text{On a donc : } p_{\text{gris}}(\text{élevage 1}) = \frac{\text{gris} \cap \text{élevage 1}}{p(\text{gris})} = \frac{0,09}{0,21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}.$$

2. On suppose qu'il y a assez d'alevins pour que la probabilité d'avoir un alevin en vie au bout de trois mois est toujours égale à 0,92.

On a donc une épreuve de Bernoulli avec $n = 5$, $p = 0,92$.

La probabilité d'avoir 3 alevins en vie sur 5 au bout de trois mois est donc égale à :

$$\binom{5}{3} 0,92^3 \times (1 - 0,92)^2 = 10 \times 0,92^3 \times 0,08^2 \approx 0,049 \approx 0,05 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

3. On a le tableau de loi de probabilité suivant :

couleur	rouge	gris	mort
probabilité	0,71	0,21	0,08
gain(€)	+1	+0,25	-0,10

On a donc $E(X) = 0,71 \times 1 + 0,21 \times 0,25 - 0,08 \times 0,10 = 0,7545 \approx 0,75$ €.

EXERCICE 4

5 points

Commun à tous les candidats

1. a. On sait que le vecteur $\vec{n}(4; 1; 2)$ est un vecteur directeur de \mathcal{D} et donc qu'une équation d'un plan \mathcal{P} perpendiculaire à \mathcal{D} est $4x + 1y + 2z + d = 0$. A appartient à ce plan si $4 \times (-1) + 1 \times 2 + 2 \times 3 + d = 0 \iff 4 + d = 0 \iff d = -4$.

Une équation du plan \mathcal{P} est donc : $4x + 1y + 2z - 4 = 0$.

b. On voit que la valeur $t = -3$ donne les coordonnées du point B.

c. On sait que la distance d_B du point B au plan \mathcal{P} est égale à $d(B, \mathcal{P}) = \frac{|4x_B + y_B + 2z_B - 4|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|4 \times (-3) + 3 + 2 \times (-4) - 4|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{21}{\sqrt{21}} = \sqrt{21}$.

d. La droite \mathcal{D} est perpendiculaire à \mathcal{P} , donc orthogonale à toute droite de \mathcal{P} . On a donc un triangle rectangle de côtés d_B et d et d'hypoténuse [AB].

Le théorème de Pythagore permet d'écrire $d^2 = AB^2 - d_B^2$.

$$AB^2 = (-2)^2 + 1^2 + (-7)^2 = 54.$$

$$\text{Donc } d^2 = 54 - 21 = 33. \text{ Finalement } d = \sqrt{33}.$$

2. On a $AM^2 = (10 + 4t)^2 + (4 + t)^2 + (-1 + 2t)^2 =$

$$100 + 16t^2 + 80t + 16 + t^2 + 8t + 1 + 4t^2 - 4t = 21t^2 + 84t + 117.$$

La distance de A à la droite \mathcal{D} est la plus petite distance AM , donc le carré de la distance correspond au minimum du trinôme $21t^2 + 84t + 117$.

$$21t^2 + 84t + 117 = 21 \left(t^2 + 4t + \frac{117}{21} \right) = 21 \left[(t+2)^2 - 4 + \frac{117}{21} \right] = 21 \left[(t+2)^2 + \frac{33}{21} \right].$$

Le minimum est obtenu pour $t = -2$; pour cette valeur le trinôme vaut

$$21 \times \frac{33}{21} = 33 = d^2. \text{ Et finalement } d = \sqrt{33}.$$