Exercice 1

1. (a) Lecture directe des données de l'énoncé!

   $P(F_1) = \frac{1}{2}$, $\quad P(F_2) = \frac{1}{3}$, $\quad P(F_3) = 1 - P(F_1) - P(F_2) = \frac{1}{6}$,

   $P_{F_1}(D) = 0,05$, $\quad P_{F_2}(D) = 0,015$, $\quad P(D) = 0,035$

   (b) On demande $P(F_1 \cap D)$.

   Mais on sait que $P(F_1 \cap D) = P(F_1) \times P_{F_1}(D)$. D'où $P(F_1 \cap D) = \frac{1}{2} \times 0,05 = 0,025$.

   (c) De même, $P(F_2 \cap D) = P(F_2) \times P_{F_2}(D) = \frac{1}{3} \times 0,015 = 0,005$.

   (d) D'après la Loi des Probabilités Totales:

   $$P(D) = P(F_1 \cap D) + P(F_2 \cap D) + P(F_3 \cap D)$$

   D'où:

   $$P(F_3 \cap D) = P(D) - P(F_1 \cap D) - P(F_2 \cap D) = 0,035 - 0,025 - 0,005 = 0,005$$

   (e) On a alors:

   $$P_{F_3}(D) = \frac{P(F_3 \cap D)}{P(F_3)} = \frac{0,005}{\frac{1}{6}} = 0,03$$

2. Si on appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de paires de chaussettes ayant un défaut dans un choix de six paires choisies de façon indépendante, alors X suit la Loi Binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $n = 6$ et $p = 0,035$.
   On a donc: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{6-k} = \binom{6}{k} (0,035)^k (0,965)^{6-k}$.
   En particlier!

   (a) $P(X = 2) = \binom{6}{2} (0,035)^2 (0,965)^4 \approx 0,0159$.

   (b) *Au plus une paire a un défaut* correspond à $X = 0$ OU $X = 1$.

   On veut donc: $P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{6}{0} (0,035)^0 (0,965)^6 + \binom{6}{1} (0,035)^1 (0,965)^5 \approx 0,9832$

Exercice 2

1. D est l'iamge de A par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

   Si a est l'affixe de A et d l'affixe de D, on a alors $d = -\mathrm{i}a$.

   Comme $a = 1$, on a donc $d = -\mathrm{i}$.

   De plus, $OADC$ est un carré, donc en particulier, un parallèlogramme. On a donc $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC}$.

   D'où, O étant l'origine du repère, $a + d = c$, c'est à dire: $c = 1 - \mathrm{i}$.

2. (a) Ecriture complexe de r ... $z' = \mathrm{i}z$ .. C'est du cours!

   (b) F est l'image de B par r ... Donc : $f = \mathrm{i}b$.

   (c) $OBEF$ est un carré, donc un parallèlogramme, donc $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF}$.
   D'où $e = f + b = (1 + \mathrm{i})b$.

3. $OFGD$ est un parallèlogramme .. Donc : $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OD}$.

   D'où .. $g = f + d = \mathrm{i}b - \mathrm{i} = \mathrm{i}(b - 1)$.

4. D'où ....

$$\frac{e-g}{c-g} = \frac{(1+\mathrm{i})b - \mathrm{i}(b-1)}{(1-\mathrm{i}) - \mathrm{i}(b-1)} = \frac{b+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}b} = \frac{b+\mathrm{i}}{-\mathrm{i}(b+\mathrm{i})}$$

   D'où ...

$$\frac{e-g}{c-g} = \frac{1}{-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$$

   On a donc $(\overrightarrow{GC};\overrightarrow{GE}) = Arg(\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2}$ .. EGC est donc rectangle en G.

   De plus, $\dfrac{|e-g|}{|c-g|} = |\mathrm{i}| = 1$, donc $EG = CG$ .. EGC est donc isocèle en G....

Exercice 3
Partie A

1. f est la somme de deux fonctions strictement croissantes sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc f est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   On peut aussi voir que f est dérivable sur cet intervalle et que pour tout $x > 0$, $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} > 0$.

2. f est continue sur $]0\ ;\ +\infty$. De plus $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

   Donc, d'après le Théorème des Valeurs intermédiares, l'image de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par f est $\mathbb{R}$.

   En particulier, 0 a au moins un antécédent par f, donc, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $]0\ ;\ +\infty[$.

   Mais on sait aussi que f est strictement croissante sur cet intervalle.

   Si α et β sont deux solutions distinctes avec $\alpha < \beta$ sur cet intervalle de cette équation, on a alors $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

   Comme f est strictement croissante, on a $\alpha < \beta \Longrightarrow f(\alpha) < f(\beta)$.

   D'où, contradiction .. d'où unicité de la solution dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation $f(x) = 0$.

   Il y a donc Existence et Unicité dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ de la solution de l'équation $f(x) = x$.

   On note α cete solution unique!

   On remarque, comme f est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, que pour tout $x > 0$,

   $$x < \alpha \iff f(x) < 0$$

   $$x > \alpha \iff f(x) > 0$$

3. Un simple calcul donne $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \ln(2) < 0$ et $f(1) = 1 > 0$. On a donc $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Partie B

1. (a) g est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout $x \in\ ]0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{1}{5}(4 - \dfrac{1}{x}) = \dfrac{4x-1}{5x}$.

   Donc, sur $]0\ ;\ +\infty[$, $g'(x)$ est du signe de $(4x-1)$. D'où le tableau de signe de g', et celui de variation de g!

   g est alors strictement décroissante sur $]0\ ;\ \frac{1}{4}]$ puis strictement croissante sur $[\frac{1}{4}\ ;\ +\infty[$.

   (b) En particluier, g est strictement croissante sur $[\frac{1}{2}\ ;\ 1]$.

   Mais, $g(\frac{1}{2}) = \dfrac{2+\ln(2)}{5} > \dfrac{1}{2}$, et $g(1) = \dfrac{4}{5} < 1$.

   Donc, pour tout $x \in [\frac{1}{2}\ ;\ 1]$, on a : $\frac{1}{2} < g(\frac{1}{2}) \leq g(x) \leq g(1) < 1$.

   On a donc, bien, pour tout $x \in [\frac{1}{2}\ ;\ 1]$, $g(x) \in [\frac{1}{2}\ ;\ 1]$.

   (c) x vérifie (E) si et seulement si $\ln(x) = -x$.

   Or, pour tout $x > 0$, $g(x) = x \iff \dfrac{4x - \ln(x))}{5} = x \iff 4x - \ln(x) = 5x \iff \ln(x) = -x$.

   D'où la réponse!

2. (a) On sait que g est strictement croissante sur $[\frac{1}{2}; 1]$.

   De plus, $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_1 = g(u_0) = g(\frac{1}{2}) \in [\frac{1}{2}\ ;\ 1]$.

   La propriété $P(n)$: "$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$" est donc vraie pour $n = 0$.

Si on fait l'hypothèse de récurrence $\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$,
comme g est strctement croissante sur $[\dfrac{1}{2}; 1]$, on a alors:

$$g(\frac{1}{2}) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(1)$$

D'où .... $\dfrac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$ ... car $g(u_n) = u_{n+1}$ et $g(u_{n+1}) = u_{n+2}$).
Mais " $\dfrac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$ " n'est rien d'autre que $P(n+1)$.
On a donc, pour tout $n \in I\!N$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$... P est héréditaire.
On conclut alors!
$P(0)$ est vraie et pour tout $n \in I\!N$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.
La propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout $n \in I\!N$.

On a bien

$$\forall n \in I\!N, \quad \frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

(b) La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 1 ... Donc (u_n) est une suite convergente.
Appelons L sa limite.
Comme g est continue, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = g(L)$.
Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.
D'où, d'après l'unicité de la limite, L doit vérifier l'égalité $g(L) = L$.
D'où, d'après l'unicité de la solution de l'équation $g(x) = x$, ... on a $L = \alpha$.
D'où $\lim\limits_{nto+\infty} u_n = \alpha$.

3. (a) $u_{10} \approx 0,567123563$.
   (b) $0,567 \leq \alpha \leq 0,568$.

Exercice 4

1. Réponse (1)

   La solution f de l'équation diffrénetille $y' + 2y = 6$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$ est

   $$f(x) = -2e^{-2x} + 3$$

   Voir son cours sur $y' + ay = b$.

2. Réponse (3)

   ABC triangle est I tel que $2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$.

   Les points G, A et I sont alignés si G est le bartcentre du système $\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$.

   Penser à l'associativité du barycentre!

   $2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0} \iff I = \text{bary}\{B, 2); (C, 1)\}$.

   $\text{bary}\{A, 1); (B, 2); (C, 1)\} = \text{bary}\{(A, 1); (I, 3)\}$.

3. Réponse (3)

   $\mathcal{P}$ d'équation $x - 3y + 2z = 5$. Un simple calcul montre que $H_1 \notin \mathcal{P}$ et que H_2 et $H_3 \in \mathcal{P}$.

   Mais, si H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$ alors $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires avec $\overrightarrow{n}$ vecteur normal à $\mathcal{P}$.

   D'après l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$, le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$.

   De plus, $\overrightarrow{AH_2}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH_3}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   D'où le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$ est H_3.

4. Réponse (2)

   Valeur moyenne de f sur $[a\ ;\ b] = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

   Dans le cas de la question:

   Première possibilité de justification

   La valeur moyenne de f sur $[0\ ;\ 1]$ est : $m = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

   Or, pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, on a: $1 \leq 1 + x^2 \leq 2$, donc, $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$.

   Donc, en intégrant sur $[0\ ;\ 1]$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \leq \int_0^1 1dx$.

   D'où , $\dfrac{1}{2} \leq m \leq 1$.

   Des trois valeurs proposées, seule $\dfrac{\pi}{4}$ est comprise entre $\dfrac{1}{2}$ et 1. Donc, $m = \dfrac{\pi}{4}$.

   Deuxième possiblité de justification, mais hors programme en TS

   Valeur Moyenne de f sur $[0\ ;\ 1] = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1x+^2} = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.