

EXERCICE 1

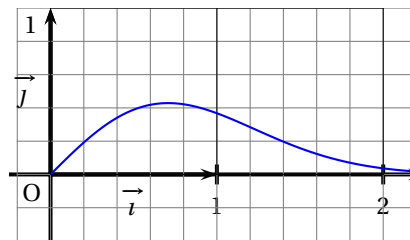
7 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

(On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$).

- b. Démontrer que f admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

2. Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de a , l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.

Quelle est la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx.$$

On ne cherchera pas à expliciter u_n .

1. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n différent de 0 et de 1

$$f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$

- b. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$?
 c. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

2. a. Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif n , $F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,499 938 295 1	0,499 999 943 7	0,5	0,5	0,5

Interpréter ces résultats.

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 3 - i, \quad b = 1 - 3i \text{ et } c = -1 - i.$$

1.
 - a. Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
 - b. Quelle est la nature du triangle ABC ?
 - c. Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O, dont on calculera le rayon.
2. Soit M un point quelconque du plan d'affixe notée m et N le point d'affixe notée n , image de A dans la rotation r de centre M et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.
 - a. Donner l'écriture complexe de la rotation r .
 - b. En déduire une expression de n en fonction de m .
3. On appelle Q le milieu du segment $[AN]$ et q son affixe.
Montrer que : $q = \frac{(1-i)m}{2} + 2 + i$.
4. Dans cette question, M est un point du cercle Γ .
 - a. Justifier l'existence d'un réel θ tel que : $m = \sqrt{10}e^{i\theta}$.
 - b. Calculer $|q - 2 - i|$. Quel est le lieu Γ' de Q lorsque M décrit le cercle Γ ?

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = 1 + 2i$.

1. Justifier qu'il existe une unique similitude directe S telle que :

$$S(O) = A \text{ et } S(A) = B.$$

2. Montrer que l'écriture complexe de S est :

$$z' = (1 - i)z + i.$$

Préciser les éléments caractéristiques de S (on notera Ω le centre de S).

On considère la suite de points (A_n) telle que :

- A_0 est l'origine du repère et,
- pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = S(A_n)$.

On note z_n , l'affixe de A_n . (On a donc $A_0 = O$, $A_1 = A$ et $A_2 = B$).

3.
 - a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $z_n = 1 - (1 - i)^n$.
 - b. Déterminer, en fonction de n , les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$.
Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}})$.
 - c. En déduire une construction du point A_{n+1} connaissant le point A_n .
Construire les points A_3 et A_4 .
4. Quels sont les points de la suite (A_n) appartenant à la droite (ΩB) ?

EXERCICE 3**4 points****Commun à tous les candidats**

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points :

A de coordonnées (1, 1, 0), B de coordonnées (2, 0, 3), C de coordonnées (0, -2, 5) et D de coordonnées (1, -5, 5).

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou par FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que $y = 2x + 4$ est une droite.

Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ est l'homothétie de centre G , où G désigne le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1), (C, 2)\}$, et de rapport 3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées (3, 3, 0) et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x + 2y + z + 3 = 0$.

EXERCICE 4**4 points****Commun à tous les candidats**

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

- Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?
- Quelle est son espérance ?
- Calculer $P(X = 2)$.

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.

On considère les évènements D et A suivants :

- D « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
- A : « obtenir exactement deux 6 ».

a. Calculer la probabilité des évènements suivants :

- « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
- « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

(On pourra construire un arbre de probabilité).

b. En déduire que : $p(A) = \frac{7}{48}$.

c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

On note B_n l'évènement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».

- Déterminer, en fonction de n , la probabilité p_n de l'évènement B_n .
- Calculer la limite de la suite (p_n) . Commenter ce résultat.